11-A1

式 11-3 より，棒に生じるひずみ$\varepsilon = \lambda / \ell$を用いてひずみエネルギーを表せば,

$$U = \frac{\sigma\varepsilon}{2} A\ell = \frac{E\varepsilon^2}{2} A\ell = \frac{EA\lambda^2}{2\ell} = \frac{206\times10^9\times30\times10^{-3}\times5\times10^{-3}\times(0.5\times10^{-3})^2}{2\times1} = 3.86\,[J]$$

11-A2

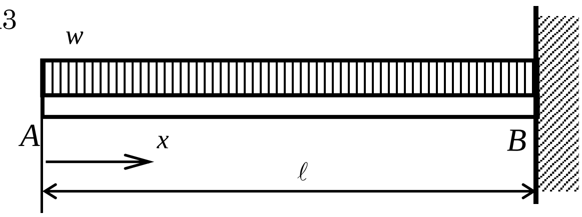
軸の極断面二次モーメント Ip は,

$$I_p = \frac{\pi d^4}{32} = \frac{\pi}{32}\times0.08^4 = 4.02\times10^{-6}[m^4]$$

式(11-12)より,

$$U = \frac{T^2\ell}{2GI_p} = \frac{(10\times10^3)^2\times10}{2\times83\times10^9\times4.02\times10^{-6}} = 1500\,[J]$$

11-A3



片持ちはりの先端 A からの距離 x の位置に生じる曲げモーメントは,

$$M = -\frac{w}{2}x^2$$

したがって，ひずみエネルギーU は，式（11-10）より積分して求める。

$$U = \int_0^\ell \frac{M^2}{2EI}dx = \frac{1}{2EI}\int_0^\ell (-\frac{w}{2}x^2)^2 dx = \frac{w^2}{8EI}\int_0^\ell x^4 dx = \frac{w^2\ell^5}{40EI}$$

11-A4

図(a)，(b)，(c)それぞれのひずみエネルギーを Ua，Ub，Uc とすれば，直径 d/2 の部分の断面積は $A_1 = \pi d^2/16$，直径 d の断面積は $A_2 = \pi d^2/4$ であるので，

$$U_a = \frac{P^2\ell}{2EA} = \frac{8P^2\ell}{\pi d^2 E}, \quad U_b = \frac{P^2(\ell/2)}{2EA_1} + \frac{P^2(\ell/2)}{2EA_2} = \frac{4P^2\ell}{\pi d^2 E} + \frac{P^2\ell}{\pi d^2 E} = \frac{5P^2\ell}{\pi d^2 E},$$

$$U_c = \frac{P^2(\ell/3)}{2EA_1} + 2\times\frac{P^2(\ell/3)}{2EA_2} = \frac{8P^2\ell}{3\pi d^2 E} + 2\times\frac{2P^2\ell}{3\pi d^2 E} = \frac{4P^2\ell}{\pi d^2 E}$$

したがって，Ua＞Ub＞Uc　である。

11-A5

おもりが静的に作用したときの応力 σ_0 および伸び λ_0 は，

$$A = \frac{\pi}{4}d^2 = \frac{\pi}{4}\times 10^2 = 25\pi\ [mm^2]$$

$$\sigma_0 = \frac{mg}{A} = \frac{10\times 9.8}{A} = \frac{98}{25\pi} = 1.25\ [MPa]$$

$$\lambda_0 = \frac{mg\ell}{EA} = \frac{10\times 9.8\times 500}{206\times 10^3\times 25\pi} = 3.03\times 10^{-3}\ [mm]$$

棒に生じる最大衝撃応力 σ および最大伸び λ は，式(11-15)および(11-16)から次のようになる。

$$\frac{\sigma}{\sigma_0} = \left(1+\sqrt{1+\frac{2h}{\lambda_0}}\right) = \left(1+\sqrt{1+\frac{2\times 300}{3.03\times 10^{-3}}}\right) = 446$$

$$\frac{\lambda}{\lambda_0} = \left(1+\sqrt{1+\frac{2h}{\lambda_0}}\right) = \left(1+\sqrt{1+\frac{2\times 300}{3.03\times 10^{-3}}}\right) = 446$$

したがって，静的荷重の場合の 446 倍の衝撃応力および伸びが生じる。

11-B1

片持はり先端から x を取れば，x の位置に生じる曲げモーメントは，M=－Px である。

図(a)の三角形はりの x の位置でのはりの幅は $b = b_0 x / \ell$ であるので，断面二次モーメント I は， $I(x) = bh^3/12 = b_0 h^3 x/(12\ell) = I_0 x/\ell$

ここで， $I_0 = b_0 h^3/12$ である。これより，ひずみエネルギーは，

三角形はり： $U_a = \int_0^{\ell} \frac{M^2}{2EI(x)} dx = \int_0^{\ell} \frac{(Px)^2}{2EI_0 x/\ell} dx = \frac{P^2 \ell}{2EI_0} \int_0^{\ell} x dx = \frac{P^2 \ell^3}{4EI_0}$

長方形はり： $U_b = \int_0^{\ell} \frac{M^2}{2EI_0} dx = \int_0^{\ell} \frac{(Px)^2}{2EI_0} dx = \frac{P^2}{2EI_0} \int_0^{\ell} x^2 dx = \frac{P^2 \ell^3}{6EI_0}$

したがって，Ua＞Ub である。図(a)のはりは，はりのどの断面でも応力が等しい平等強さのはりであり，はり全体の応力が等しくなる形状では，蓄えられるひずみエネルギーが大きくなることが分かる（問題 11-A4 も同様）。

11-B2

中実軸の場合，最大せん断応力が τa に達するときのねじりモーメント T は，

$$\tau_a = \frac{T}{I_p} \frac{d}{2} \quad \rightarrow \quad T = \frac{2I_p}{d} \tau_a$$

単位長さ当たりのひずみエネルギーU は，式（11-12）の $\ell = 1$ として，

$$U = \frac{T^2}{2GI_p} = \frac{2I_p}{d^2 G} {\tau_a}^2$$

一方，中空軸の最大せん断応力が τa に達するときのねじりモーメント T’は，極断面二次モーメントが $I'_p = \frac{\pi}{32}(1 - 0.8^4) d^4 = 0.5904 I_p$ であるので，

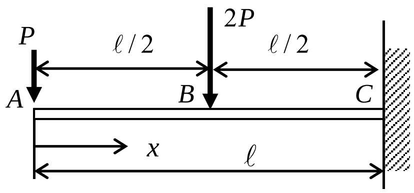
$$\tau_a = \frac{T}{I'_p}\frac{d}{2} \quad \rightarrow \quad T' = \frac{2I'_p}{d}\tau_a = 0.5904T$$

単位長さ当たりのひずみエネルギーU’は,

$$U' = \frac{T'^2}{2GI'_p} = \frac{(0.5904T)^2}{2G \times 0.5904 I_p} = 0.5904\frac{T^2}{2GI_p} = 0.5904U$$

したがって，U’／U＝0。5904 であり，中実軸の方が蓄えられるエネルギーが大きい。

11-B3



区間 AB と BC ではりに生じる曲げモーメントが異なるため，区間 AB と BC に分けてひずみエネルギーを求める。

区間 AB では，曲げモーメントは$M = -Px$であるので，ひずみエネルギーは,

$$U_{AB} = \int_0^{\ell/2} \frac{M^2}{2EI} dx = \int_0^{\ell/2} \frac{(Px)^2}{2EI} dx = \frac{P^2 \ell^3}{48EI}$$

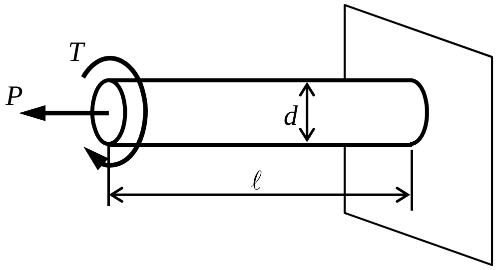
一方，区間 BC では，曲げモーメントは$M = -Px - 2P(x - \ell/2) = -P(3x - \ell)$であるので，ひずみエネルギーは,

$$U_{BC} = \int_{\ell/2}^{\ell} \frac{M^2}{2EI} dx = \frac{P^2}{2EI} \int_{\ell/2}^{\ell} (3x - \ell)^2 dx = \frac{7P^2 \ell^3}{16EI}$$

したがって，はりに蓄えられるひずみエネルギーは,

$$U = U_{AB} + U_{BC} = \frac{P^2 \ell^3}{48EI} + \frac{7P^2 \ell^3}{16EI} = \frac{11P^2 \ell^3}{24EI}$$

11-B4

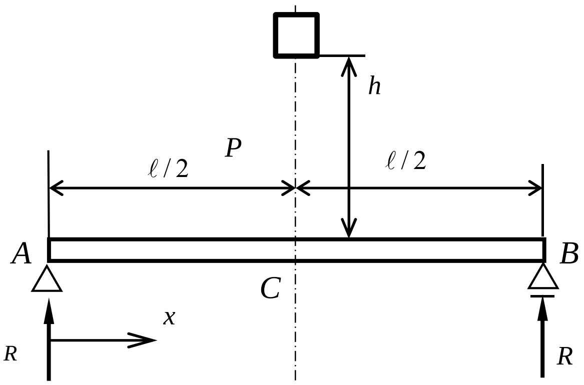


異なる形式の荷重が作用する場合，それぞれの荷重のみの場合に生じるひずみエネルギーの和で，全体のひずみエネルギーを求めることができる。

この問題の場合, 引張荷重 P とねじりモーメント T という異なる形式の荷重が作用するので，はりに蓄えられるひずみエネルギーU は,

$$U = \frac{P^2 \ell}{2EA} + \frac{T^2 \ell}{2GI_p} = \frac{2P^2 \ell}{\pi d^2 E} + \frac{16T^2 \ell}{\pi d^4 G}$$

11-B5



おもりの落下による衝撃で, 両端支持はりの中央 C 点が最大変位 v が生じると考えれば，おもりの位置エネルギーU_1 は,

$$U_1 = mg(h + v)$$

おもりの衝突によってはりに生じる衝撃荷重を P とし，その時の応力分布は静荷重を受けた時と同じであると仮定すると，支点反力 R=P/2 であるから，

$$U_2 = 2\int_0^{\ell/2} \frac{M^2}{2EI} dx = \frac{1}{EI}\int_0^{\ell/2} (Rx)^2 dx = \frac{1}{EI}\int_0^{\ell/2} (\frac{P}{2}x)^2 dx = \frac{P^2 \ell^3}{96EI}$$

ここで，衝撃荷重 P による両端支持はりの中央のたわみは，静荷重の場合と同様に $v = P\ell^3/(48EI)$ と考えれば，U_1 に代入して，

$$U_1 = mg(h + \frac{P\ell^3}{48EI})$$

力学的エネルギーの保存則 $U_1 = U_2$ から，

$$\frac{\ell^3}{96EI} P^2 - \frac{mg\ell^3}{48EI} P - mgh = 0$$

上式を解けば，衝撃荷重 P が得られる。

$$P = mg\left(1 + \sqrt{1 + \frac{96EIh}{mg\ell^3}}\right)$$

これより，はり中央に生じる最大のたわみ v は，静荷重 mg によるたわみ $v_0 = mg\ell^3/(48EI)$ を用いて表すと，

$$v = \frac{P\ell^3}{48EI} = \frac{mg\ell^3}{48EI}\left(1 + \sqrt{1 + \frac{96EIh}{mg\ell^3}}\right) = v_0\left(1 + \sqrt{1 + \frac{2h}{v_0}}\right)$$

となり，片持はりの衝撃によるたわみの式 11-18 と同じ形式であることが分かる。

11-B6

質量mの物体が速度 V で移動しているときの運動エネルギーU_1は,

$$U_1 = \frac{1}{2} m V^2$$

片持はりの自由端に物体が衝突したときの衝撃荷重を P とすれば，はりに蓄えられるひずみエンルギーU_2は,

$$U_2 = \int_0^{\ell} \frac{M^2}{2EI} dx = \frac{1}{EI} \int_0^{\ell} \frac{(Px)^2}{2EI} dx = \frac{P^2 \ell^3}{6EI}$$

力学的エネルギーの保存則 $U_1=U_2$ から,

$$\frac{P^2 \ell^3}{6EI} = \frac{1}{2} m V^2$$

したがって，衝撃荷重 P は,

$$P = \sqrt{\frac{3mEI}{\ell^3}} V$$

片持ちはりでは，曲げモーメントの最大値は固定端に生じる。

衝撃荷重 P によって固定端に生じる最大曲げモーメント M_{max} は,

$$M_{\max} = P\ell = \sqrt{\frac{3mEI}{\ell^3}} V\ell = \sqrt{\frac{3mEI}{\ell}} V$$

したがって，固定端に生じる最大曲げ応力は,

$$\sigma_{\max} = \frac{M_{\max}}{Z} = \sqrt{\frac{3mEI}{\ell}} \frac{V}{Z}$$