

12-A1

部材 AB および BC に作用する軸力を Q_{AB} , Q_{BC} とする。

荷重点 B における力のつり合いより,

$$\text{水平方向: } Q_{AB} \cos 30^\circ + Q_{BC} \cos 30^\circ = 0$$

$$\text{垂直方向: } Q_{AB} \sin 30^\circ - Q_{BC} \sin 30^\circ - P = 0$$

上式より, $Q_{AB} = P$, $Q_{BC} = -P$

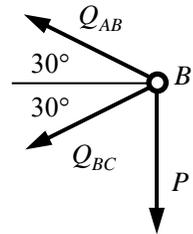
トラス全体のひずみエネルギーは, 部材に作用する軸力から,

$$U = U_{AB} + U_{BC} = \frac{Q_{AB}^2 \lambda}{2EA} + \frac{Q_{BC}^2 \lambda}{2EA} = \frac{P^2 \lambda}{EA}$$

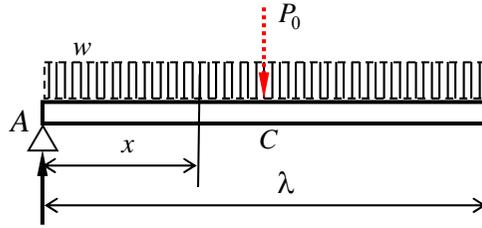
ここで, 部材 AB および BC の長さは λ である。

荷重点 B の垂直方向 (荷重方向) 変位 δ_B は, カスティリアノの定理より,

$$\delta_B = \frac{\partial U}{\partial P} = \frac{2P\lambda}{EA}$$



12-A2



カスティリアノの定理を利用するために、両端支持はりの中央に仮想荷重 P_0 を考える。

支持反力は対称性より R とすれば、

$$R = \frac{P_0 + w\lambda}{2} \dots (a)$$

支持端 A から x の位置に生じる曲げモーメント M は、

$$M = Rx - \frac{w}{2}x^2$$

ひずみエネルギーは、対称性より $\lambda/2$ までの積分を 2 倍して求める。

$$\begin{aligned} U &= 2 \times \int_0^{\lambda/2} \frac{M^2}{2EI} dx = \frac{1}{EI} \int_0^{\lambda/2} \left(Rx - \frac{w}{2}x^2 \right)^2 dx = \frac{1}{EI} \int_0^{\lambda/2} \left(R^2x^2 - Rwx^3 + \frac{w^2}{4}x^4 \right) dx \\ &= \frac{1}{EI} \left[R^2 \frac{x^3}{3} - Rw \frac{x^4}{4} + \frac{w^2}{4} \frac{x^5}{5} \right]_0^{\lambda/2} = \frac{1}{EI} \left[R^2 \frac{\lambda^3}{24} - Rw \frac{\lambda^4}{64} + \frac{w^2 \lambda^5}{640} \right] \end{aligned}$$

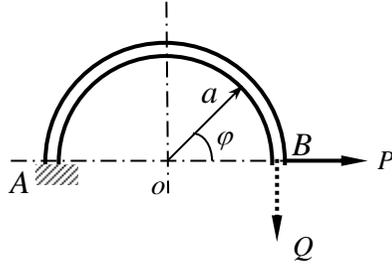
上式に式(a)を代入して、カスティリアノの定理を適用する。

$$v_c = \frac{\partial U}{\partial P_0} = \frac{1}{EI} \left[\frac{2P_0 + 2w\lambda}{4} \times \frac{\lambda^3}{24} - \frac{1}{2} \times \frac{w\lambda^4}{64} \right]$$

仮想荷重 $P_0 = 0$ とすれば、はりの中央のたわみ v_c は、

$$v_c = \frac{5w\lambda^4}{384EI}$$

12-A3



B 点の垂直方向の垂直方向変位 v_B を求めるため、仮想荷重 Q を作用させる。

角度 φ の位置に生じる曲げモーメントは、

$$M = Pa \sin \varphi - Qa(1 - \cos \varphi) = Pa \sin \varphi + Qa(\cos \varphi - 1)$$

$$\frac{\partial M}{\partial Q} = a(\cos \varphi - 1)$$

カステイリアノ定理を適用して、

$$\begin{aligned} v_B &= \frac{\partial U}{\partial Q} = \frac{\partial U}{\partial M} \frac{\partial M}{\partial Q} = \int_0^\pi \frac{M}{EI} \frac{\partial M}{\partial Q} a d\varphi \\ &= \frac{1}{EI} \int_0^\pi \{Pa \sin \varphi + Qa(\cos \varphi - 1)\} a(\cos \varphi - 1) a d\varphi \end{aligned}$$

仮想荷重 $Q = 0$ であるので、

$$\begin{aligned} v_B &= \frac{Pa^3}{EI} \int_0^\pi \sin \varphi (\cos \varphi - 1) d\varphi = \frac{a^3}{EI} \int_0^\pi (\sin \varphi \cos \varphi - \sin \varphi) d\varphi = \frac{a^3}{EI} \int_0^\pi \left(\frac{1}{2} \sin 2\varphi - \sin \varphi \right) d\varphi \\ &= \frac{a^3}{EI} \left[-\frac{1}{4} \cos 2\varphi + \cos \varphi \right]_0^\pi = -\frac{2Pa^3}{EI} \end{aligned}$$

12-A4

図のように B 点で切断して、AB 間、BC 間でひずみエネルギーを考える。

(AB 間の引張荷重 P によるひずみエネルギーは小さいので無視する)

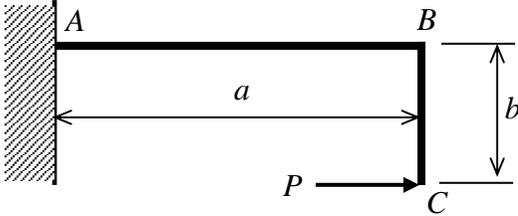


図 1 L 字型はり

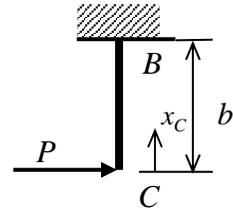
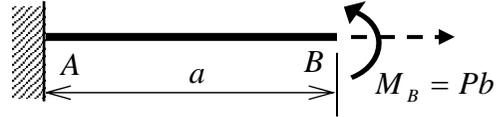


図 2 自由体図

BC 間のひずみエネルギーは、自由端 C からの距離を x_C として、

$$U_{BC} = \int_0^b \frac{M^2}{2EI} dx = \frac{1}{2EI} \int_0^b (Px_C)^2 dx = \frac{P^2 b^3}{6EI}$$

AB 間のひずみエネルギーは、モーメント $M_B = Pb$ は一定であるので、

$$U_{AB} = \int_0^a \frac{M_B^2}{2EI} dx = \frac{M_B^2 a}{2EI} = \frac{P^2 ab^2}{2EI}$$

したがって、フレーム全体のひずみエネルギー U は、

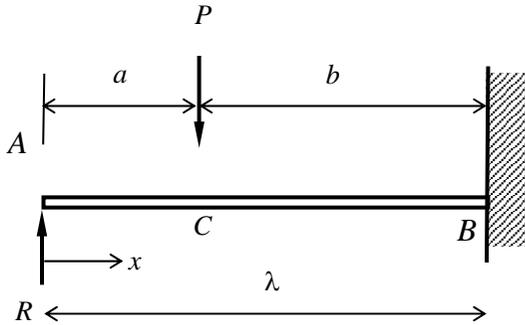
$$U = U_{BC} + U_{AB} = \frac{P^2 b^3}{6EI} + \frac{P^2 ab^2}{2EI} = \frac{P^2 b^2}{6EI} (3a + b)$$

C 点の水平方向変位 u_C は、カスティリアノの定理より、

$$u_C = \frac{\partial U}{\partial P} = \frac{Pb^2}{3EI} (3a + b)$$

12-A5

図のように A 点に反力 R , C 点に荷重 P が作用する片持ちはりとなみなし, A 点のたわみがゼロになる荷重 R を求める問題として考える。



図の A 点のたわみ v_A は, カスティリアノの定理により次のようになる。

$$v_A = \frac{\partial U}{\partial R} = \frac{\partial}{\partial R} (U_{AC} + U_{BC}) = 0$$

ここで, U_{AC} および U_{BC} は, それぞれ AC 間および BC 間のひずみエネルギーである。

計算が容易なように, ひずみエネルギーそのものではなく, R で偏微分した値をそれぞれの区間で求める。

AC 間については, 自由端 A からの距離を x とすれば, 曲げモーメント $M = Rx$ であるので,

$$\frac{\partial U_{AC}}{\partial R} = \int_0^a \frac{M}{EI} \frac{\partial M}{\partial R} dx = \frac{1}{EI} \int_0^a Rx^2 dx = \frac{Ra^3}{3EI}$$

BC 間については, 曲げモーメント $M = Rx - P(x-a)$ であるので,

$$\begin{aligned}
\frac{\partial U_{BC}}{\partial R} &= \int_a^{a+b} \frac{M}{EI} \frac{\partial M}{\partial R} dx = \frac{1}{EI} \int_a^{a+b} \{Rx - P(x-a)\} x dx = \frac{1}{EI} \int_a^{a+b} (Rx^2 - Px^2 + Pax) dx \\
&= \frac{1}{EI} \left[(R-P) \frac{x^3}{3} + Pa \frac{x^2}{2} \right]_a^{a+b} = \frac{1}{EI} \left[(R-P) \frac{(a+b)^3}{3} + Pa \frac{(a+b)^2}{2} - (R-P) \frac{a^3}{3} - Pa \frac{a^2}{2} \right] \\
&= \frac{1}{6EI} [2\{(a+b)^3 - a^3\}R - (3a+2b)b^2P]
\end{aligned}$$

上記の結果より，A点のたわみはゼロであるので，

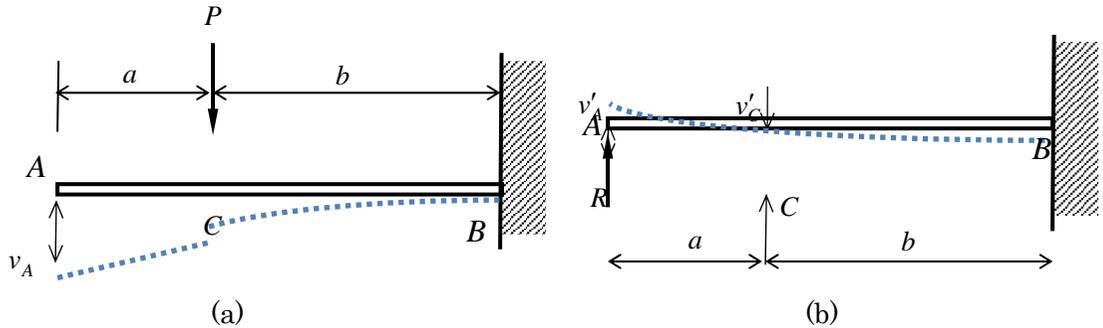
$$\begin{aligned}
\frac{\partial U_{AC}}{\partial R} + \frac{\partial U_{BC}}{\partial R} &= \frac{Ra^3}{3EI} + \frac{1}{6EI} [2\{(a+b)^3 - a^3\}R - (3a+2b)b^2P] \\
&= \frac{1}{6EI} [2(a+b)^3R - (3a+2b)b^2P] = 0
\end{aligned}$$

したがって，支点反力 R は，

$$R = \frac{(3a+2b)b^2}{2(a+b)^3} P$$

12-A6

図のように A 点に反力 R , C 点に荷重 P が作用する片持ちはりとなし、A 点のたわみがゼロになる荷重 R を求める問題として考える。



図(b)より、A 点および C 点のたわみは、式 7-21 より、

$$v'_C = \frac{Rb^2}{6EI}(3a+2b), \quad v'_A = \frac{R(a+b)^3}{3EI}$$

図(a), (b)から相反定理より、

$$Pv'_C = Rv_A$$

解くべき問題の A 点は支持端であるのでたわみはゼロであるから、図(a)および(b)の A 点の変位の条件は、 $v_A = v'_A$ である。

したがって、反力 R は、

$$R = \frac{v'_C}{v_A} P = \frac{v'_C}{v'_A} P = \frac{(3a+2b)b^2}{2(a+b)^3} P$$

これは、前問の結果と一致している。

12-B1

部材 AB に作用する軸力を N_{AB} とする。以下、各部材の軸力の記号も同様。
 まず、各部材に生じる軸力を支点の力のつり合いより求める。

荷重点 C における力のつり合いより、

$$\text{水平方向： } N_{BC} + N_{CE} \cos 45^\circ = Q$$

$$\text{垂直方向： } N_{CE} \sin 45^\circ + P = 0$$

$$\text{上式より、 } N_{BC} = P + Q, \quad N_{CE} = -\sqrt{2}P$$

点 B における力のつり合いより、

$$\text{水平方向： } N_{BC} = N_{AB}$$

$$\text{垂直方向： } N_{BE} = 0$$

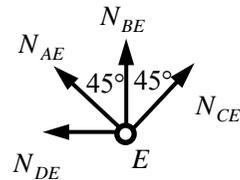
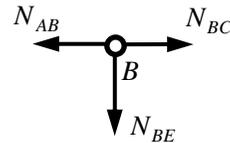
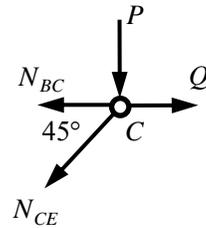
$$\text{上式より、 } N_{AB} = P + Q, \quad N_{BE} = 0$$

点 E における力のつり合いより、

$$\text{水平方向： } N_{AE} \sin 45^\circ + N_{DE} = N_{CE} \sin 45^\circ$$

$$\text{垂直方向： } N_{BE} + N_{AE} \cos 45^\circ + N_{CE} \cos 45^\circ = 0$$

$$\text{上式より、 } N_{AE} = \sqrt{2}P, \quad N_{DE} = -2P$$



トラス全体のひずみエネルギーは、各部材に作用する軸力から、

$$\begin{aligned} U &= U_{BC} + U_{CE} + U_{AB} + U_{AE} + U_{DE} = \frac{N_{BC}^2 \lambda}{2EA} + \frac{N_{CE}^2 \sqrt{2} \lambda}{2EA} + \frac{N_{AB}^2 \lambda}{2EA} + \frac{N_{AE}^2 \sqrt{2} \lambda}{2EA} + \frac{N_{DE}^2 \lambda}{2EA} \\ &= \frac{\lambda}{2EA} \left\{ (P+Q)^2 + 2\sqrt{2}P^2 + (P+Q)^2 + 2\sqrt{2}P^2 + 4P^2 \right\} \\ &= \frac{\lambda}{2EA} \left\{ 2(P+Q)^2 + (4+4\sqrt{2})P^2 \right\} \end{aligned}$$

荷重点 C の垂直方向変位 v_C は、カスティリアノの定理より P で偏微分して、

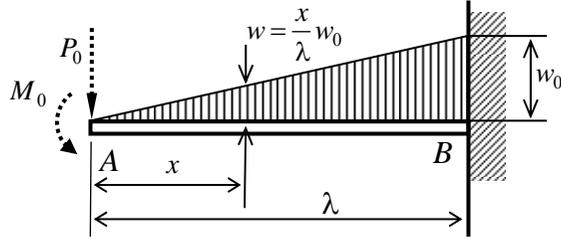
$$v_C = \frac{\partial U}{\partial P} = \frac{\lambda}{EA} \left\{ 2(P+Q) + (4+4\sqrt{2})P \right\}$$

荷重点 C の水平方向変位 u_C は、カスティアノの定理より Q で偏微分して、

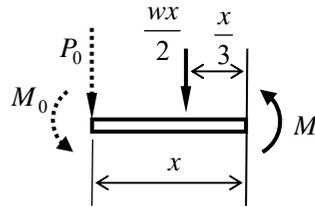
$$u_C = \frac{\partial U}{\partial Q} = \frac{2(P+Q)\lambda}{EA}$$

12-B2

カスティリアノの定理を利用するために、片持ちはりの先端に仮想荷重 P_0 および仮想モーメント M_0 を考える。



先端 A から x の位置に生じる曲げモーメント M は、図のように三角形分布荷重は集中荷重にみなしてモーメントのつり合いを考えれば、



$$M = -(M_0 + P_0x + \frac{w}{6}x^2) = -(M_0 + P_0x + \frac{w_0}{6\lambda}x^3)$$

$$\frac{\partial M}{\partial P_0} = -x, \quad \frac{\partial M}{\partial M_0} = -1$$

計算を容易にするため、例題 12-2 の式 12-11 の関係を利用する。

はりの先端 A のたわみは、 P_0 で偏微分して、

$$\begin{aligned} v_A &= \frac{\partial U}{\partial P_0} = \frac{\partial U}{\partial M} \frac{\partial M}{\partial P_0} = \int_0^\lambda \frac{M}{EI} \frac{\partial M}{\partial P_0} dx \\ &= \frac{1}{EI} \int_0^\lambda (M_0 + P_0x + \frac{w_0}{6\lambda}x^3)xdx = \frac{1}{EI} \int_0^\lambda (M_0x + P_0x^2 + \frac{w_0}{6\lambda}x^4)dx = \frac{1}{EI} \left[M_0 \frac{\lambda^2}{2} + P_0 \frac{\lambda^3}{3} + \frac{w_0}{6\lambda} \frac{\lambda^5}{5} \right] \end{aligned}$$

仮想荷重 $P_0 = M_0 = 0$ であるので、はりの先端のたわみ v_A は次のようになる。

$$v_A = \frac{w_0\lambda^4}{30EI}$$

一方、たわみ角は、 M_0 で偏微分して、

$$\begin{aligned}
 i_A &= \frac{\partial U}{\partial M_0} = \frac{\partial U}{\partial M} \frac{\partial M}{\partial M_0} = \int_0^\lambda \frac{M}{EI} \frac{\partial M}{\partial M_0} dx \\
 &= \frac{1}{EI} \int_0^\lambda \left(M_0 + P_0 x + \frac{w_0}{6\lambda} x^3 \right) dx = \frac{1}{EI} \left[M_0 \lambda + P_0 \frac{\lambda^2}{2} + \frac{w_0}{6\lambda} \frac{\lambda^4}{4} \right]
 \end{aligned}$$

仮想荷重 $P_0 = M_0 = 0$ であるので、はりの先端のたわみ角 i_A は次のようになる。

$$i_A = \frac{w_0 \lambda^3}{24EI}$$

12-B3

図のように B 点で切断して、AB 間、BC 間でひずみエネルギーを考える。

(AB 間の引張荷重 P によるひずみエネルギーは小さいので無視する)

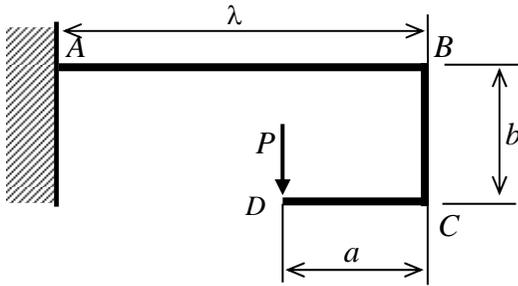


図 1 コ字型フレーム

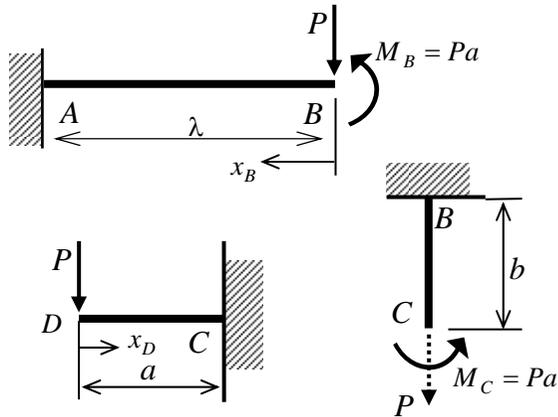


図 2 自由体図

図 2 のように各区間に分けてひずみエネルギーを計算する。

AB 間、BC 間、CD 間のひずみエネルギーをそれぞれ U_{AB} 、 U_{BC} 、 U_{CD} とする。

また、BC 間の引張荷重 P によるひずみエネルギーは曲げのそれと比較し小さいので無視する。

各区間について、それぞれ計算すれば、

$$U_{CD} = \int_0^a \frac{M^2}{2EI} dx = \frac{1}{2EI} \int_0^a (Px_D)^2 dx = \frac{P^2 a^3}{6EI}$$

$$U_{BC} = \int_0^b \frac{M_C^2}{2EI} dx = \frac{M_C^2 b}{2EI} = \frac{P^2 a^2 b}{2EI}$$

$$\begin{aligned} U_{AB} &= \int_0^\lambda \frac{M^2}{2EI} dx = \frac{1}{2EI} \int_0^\lambda (M_B - Px_B)^2 dx = \frac{P^2}{2EI} \int_0^\lambda (a - x_B)^2 dx \\ &= \frac{P^2}{2EI} \int_0^\lambda (a^2 - 2ax_B + x_B^2) dx = \frac{P^2}{2EI} \left[a^2 \lambda - a\lambda^2 + \frac{\lambda^3}{3} \right] = \frac{P^2}{6EI} (3a^2 \lambda - 3a\lambda^2 + \lambda^3) \end{aligned}$$

したがって、フレーム全体のひずみエネルギー U は、

$$U = U_{CD} + U_{BC} + U_{AB} = \frac{P^2}{6EI} (a^3 + 3a^2 b + 3a^2 \lambda - 3a\lambda^2 + \lambda^3)$$

D 点の垂直方向 v_D は、カスティリアノの定理より、

$$v_D = \frac{\partial U}{\partial P} = \frac{P}{3EI} (a^3 + 3a^2 b + 3a^2 \lambda - 3a\lambda^2 + \lambda^3)$$

12-B4

図のように支持点 B に生じる反力を R として，AC 間，CD 間のひずみエネルギーを考える。（AC 間の引張荷重 P によるひずみエネルギーは小さいので無視する）

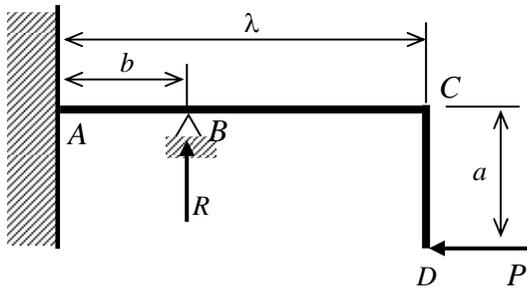


図 1 途中で支持された L 字型はり

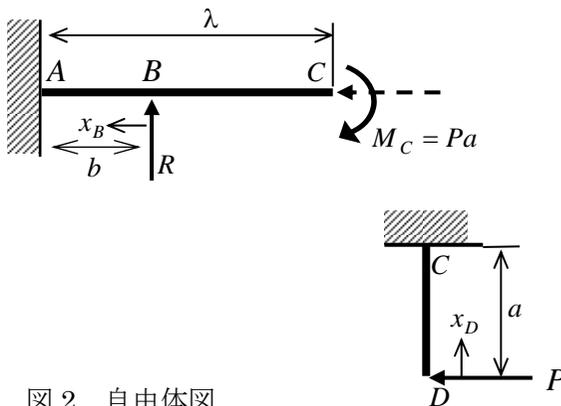


図 2 自由体図

CD 間のひずみエネルギーは，自由端 D からの距離を x_D として，

$$U_{CD} = \int_0^a \frac{M^2}{2EI} dx = \frac{1}{2EI} \int_0^a (Px_D)^2 dx = \frac{P^2 a^3}{6EI}$$

AC 間に生じる曲げモーメントは，BC 間と AB 間で異なる。支点 B からの距離を x_B とすれば，

$$M_{BC} = M_C = Pa, \quad M_{AB} = Rx_B - M_C = Rx_B - Pa$$

AC間のひずみエネルギーは、

$$\begin{aligned}
 U_{AC} &= U_{BC} + U_{AB} = \frac{M_{BC}^2(\lambda - b)}{2EI} + \int_0^b \frac{M_{AB}^2}{2EI} dx_B \\
 &= \frac{(Pa)^2(\lambda - b)}{2EI} + \frac{1}{2EI} \int_0^b (Rx_B - Pa)^2 dx_B = \frac{P^2 a^2 (\lambda - b)^2}{2EI} + \frac{1}{2EI} (R^2 \frac{b^3}{3} - RPab^2 + P^2 a^2 b)
 \end{aligned}$$

したがって、フレーム全体のひずみエネルギー U は、

$$U = U_{CD} + U_{AC} = \frac{P^2 a^3}{6EI} + \frac{P^2 a^2 (\lambda - b)^2}{2EI} + \frac{1}{2EI} (R^2 \frac{b^3}{3} - RPab^2 + P^2 a^2 b) \quad \dots (a)$$

支持点 B の反力 R は不静定量であるので、B 点の変位の条件より、 R を求める。

支持点 B のたわみは 0 であるので、カスティリアノの定理より R で偏微分して、

$$\frac{\partial U}{\partial R} = \frac{1}{2EI} (\frac{2}{3} Rb^3 - Pab^2) = 0$$

上式より、反力 R の大きさは、 $R = \frac{3}{2} \frac{a}{b} P$

式(a)に反力 R を代入して、

$$U = \frac{P^2 a^3}{6EI} + \frac{P^2 a^2 (\lambda - b)^2}{2EI} + \frac{P^2 a^2 b}{8EI} = \frac{P^2 a^2}{24EI} (4a - 9b + 12\lambda)$$

D 点の水平方向変位 u_D は、カスティリアノの定理より P で偏微分して、

$$u_D = \frac{\partial U}{\partial P} = \frac{Pa^2}{12EI} (4a - 9b + 12\lambda)$$

12-B5

相反定理より，図(a)のたわみ v は，

$$M_A i_A = Wv \quad \rightarrow \quad v = \frac{M_A}{W} i_A$$

図(b)の支点 A に生じるたわみ角 i_A は，第 7 章の式 7-50 より $x=0$ ， $a=x$ ， $b=\lambda-x$ として，

$$i_A = \frac{W}{6EI\lambda} (\lambda-x) \{x^2 + 2x(\lambda-x)\}$$

したがって，図(a)のモーメント M_A によって生じるたわみ v は，

$$v = \frac{M_A}{W} i_A = \frac{M_A}{6EI\lambda} (\lambda-x) \{x^2 + 2x(\lambda-x)\} = \frac{M_A}{6EI} \frac{x}{\lambda} (\lambda-x)(2\lambda-x)$$

(上記の結果を，演習問題 7-A2 で $M_B=0$ としたたわみと比較して確認せよ)

12-B6

水平方向に対して角度 α の方向に任意の仮想変位 δu を与え、荷重点 B が B' に移動したとする。図(b)に示すように、 x 、 y 方向の仮想変位の成分は $\delta u_x = \delta u \cos \alpha$ 、 $\delta u_y = \delta u \sin \alpha$ であるから、外力のなす仮想仕事 δW は、

$$\delta W = P_x \delta u_x + P_y \delta u_y = P_x \delta u \cos \alpha + P_y \delta u \sin \alpha$$

仮想変位による部材の伸びを $\delta \lambda_1$ 、 $\delta \lambda_2$ とし仮想変位の成分で表すと、

$$\delta \lambda_1 = \delta u_x \cos \theta + \delta u_y \sin \theta, \quad \delta \lambda_2 = \delta u_x$$

トラス全体のひずみエネルギーの変化は、

$$\begin{aligned} \delta U &= N_1 \delta \lambda_1 + N_2 \delta \lambda_2 = N_1 (\delta u_x \cos \theta + \delta u_y \sin \theta) + N_2 \delta u_x \\ &= N_1 (\delta u \cos \theta \cos \alpha + \delta u \sin \theta \sin \alpha) + N_2 \delta u \cos \alpha \end{aligned}$$

仮想仕事の原理より $\delta W = \delta U$ であるので、

$$\begin{aligned} P_x \delta u \cos \alpha + P_y \delta u \sin \alpha &= N_1 (\delta u \cos \theta \cos \alpha + \delta u \sin \theta \sin \alpha) + N_2 \delta u \cos \alpha \\ &= (N_1 \cos \theta + N_2) \delta u \cos \alpha + N_1 \sin \theta \delta u \sin \alpha \end{aligned}$$

両辺を比較すれば、

$$P_x = N_1 \cos \theta + N_2, \quad P_y = N_1 \sin \theta$$

上式は、荷重点における力のつり合い条件となっている。したがって、**仮想仕事の原理によって得られる式は、力のつり合い条件と等価であることが理解** できる。

部材 1、2 の軸力 N_1 、 N_2 を B 点の現実の変位 u_x 、 u_y で表すと、

$$\begin{aligned} N_1 &= \sigma_1 A = E \varepsilon_1 A = \frac{EA}{\lambda_1} \lambda_1 \\ &= \frac{EA}{\lambda_1} (u_x \cos \theta + u_y \sin \theta) = \frac{EA}{\lambda} (u_x \cos \theta + u_y \sin \theta) \cos \theta \end{aligned}$$

$$N_2 = \sigma_2 A = E \varepsilon_2 A = \frac{EA}{\lambda_2} \lambda_2 = \frac{EA}{\lambda} u_x$$

代入すれば、

$$P_x = \frac{EA}{\lambda} \{(u_x \cos \theta + u_y \sin \theta) \cos^2 \theta + u_x\}, \quad P_y = \frac{EA}{\lambda} (u_x \cos \theta + u_y \sin \theta) \cos \theta \sin \theta$$

上式を解いて、

$$u_x = \frac{P_x \lambda}{EA} - \frac{P_y \lambda \cos \theta}{EA \sin \theta}, \quad u_y = \frac{P_x \lambda \cos \theta}{EA \sin \theta} + \frac{P_y \lambda}{EA} \frac{1 + \cos^3 \theta}{\sin^2 \theta \cos \theta}$$

が得られる。荷重が $P_x = 0$, $P_y = P$ の場合,

$$u_x = -\frac{P \lambda \cos \theta}{EA \sin \theta}, \quad u_y = \frac{P \lambda}{EA} \frac{1 + \cos^3 \theta}{\sin^2 \theta \cos \theta}$$

これは例題 12-1 の結果(12-6), (12-7)と一致している。