13-A1

両端固定の柱の座屈荷重P_cは，式 13-14 より求めることができる。式 13-4 をみると，断面二次モーメントIが小さい方が，座屈荷重P_cが小さくなることがわかる。つまり，幅 40mm，高さ 30mm の長方形断面の柱が座屈する場合，幅方向ではなく高さ方向へ曲げが生じることになる。したがって，断面二次モーメントIは，例題 6-2 を参考に，

$$I = \frac{bh^3}{12}$$

より，$b = 40mm$，$h = 30mm$として求める。

座屈荷重P_cは，式 13-14 より，

$$P_c = \frac{4\pi^2 EI}{l^2} = \frac{4 \times \pi^2 \times (206 \times 10^9)\{(40 \times 10^{-3})(30 \times 10^{-3})^3\}}{3^2 \times 12} = 81.3kN$$

座屈応力σ_cは，式 13-11 より，座屈荷重P_cを柱の断面積Aで除することより求める。

$$\sigma_c = \frac{P_c}{A} = \frac{81.3 \times 10^3}{(40 \times 10^{-3})(30 \times 10^{-3})} = 67.8MPa$$

断面二次半径iは，式 13-13 より求めることができるので，細長比l/iは，

$$\frac{l}{i} = \frac{l\sqrt{A}}{\sqrt{I}} = \frac{3 \times \sqrt{12} \times \sqrt{\{(40 \times 10^{-3})(30 \times 10^{-3})\}}}{\sqrt{\{(40 \times 10^{-3})(30 \times 10^{-3})^3\}}} = 346$$

となる。

13-A2

両端回転の柱の座屈荷重P_cは，式 13-15 より求めることができる。円形断面なので，断面二次モーメントIは，例題 6-3 を参考に求めることができる。

座屈荷重P_cは，式 13-15 より，

$$P_c = \frac{\pi^2 EI}{l^2} = \frac{\pi^2 \times (206 \times 10^9) \times \pi \times (40 \times 10^{-3})^4}{1^2 \times 64} = 255kN$$

したがって，座屈応力σ_cは,

$$\sigma_c = \frac{P_c}{A} = \frac{4 \times (255 \times 10^3)}{\pi \times (40 \times 10^{-3})^2} = 203MPa$$

両端が固定されている場合の加熱によって生じる熱応力は，式 3-43 より求めることができる。式 3-43 を変形すると，以下の式が得られる。

$$(t - t_0) = -\frac{\sigma}{E\alpha}$$

したがって,

$$(t - t_0) = \frac{203 \times 10^6}{(206 \times 10^9)(10 \times 10^{-6})} = 99K$$

となる。なお，座屈応力σ_cは圧縮なので，上式の応力にはマイナス符号をつけて代入している。

よって，座屈が生じるときの温度は,

$$t = 99 + 293 = 392K$$

と求めることができる。

13-B1

座屈荷重P_cは，式 13-14 より求めることができる。円形断面の座屈荷重を$P_{c,c}$，正方形断面の座屈荷重を$P_{c,s}$とする。柱の長さが等しいので，両者の比は，

$$\frac{P_{c,c}}{P_{c,s}} = \frac{I_{c,c}}{I_{c,s}}$$

となる。ここで，円形断面の断面二次モーメントは$I_{c,c}$，正方形断面の断面二次モーメントは$I_{c,s}$とする。

円形断面の直径をd，正方形断面の辺の長さをbとする。長さと重さが等しいことから，断面積が等しいため，以下の式が得られる。

$$\frac{\pi d^2}{4} = b^2$$

したがって，円形断面の断面二次モーメント$I_{c,c}$は，

$$I_{c,c} = \frac{\pi d^4}{64} = \frac{\pi d^2}{4} \times \frac{d^2}{4} \times \frac{1}{4} = b^2 \times \frac{b^2}{\pi} \times \frac{1}{4} = \frac{b^4}{4\pi}$$

よって，円形断面の座屈荷重と正方形断面の座屈荷重の比は，

$$\frac{P_{c,s}}{P_{c,c}} = \frac{I_{c,s}}{I_{c,c}} = \frac{(b^4/12)}{(b^4/4\pi)} = \frac{\pi}{3} \approx 1.05$$

と求めることができる。すなわち，正方形断面の座屈荷重は，円形断面の座屈荷重の 1.05 倍大きい。

13-B2

長さが等しく，重さが等しいことから，アルミニウム合金および鋼の密度を，それぞれ，ρ_{Al}およびρ_{St}とすると，以下の式が得られる。

$$\frac{\pi d_{Al}^2}{4}\rho_{Al} = \frac{\pi d_{St}^2}{4}\rho_{St}$$

ここで，アルミニウム合金および鋼の棒の直径は，それぞれ，d_{Al}およびd_{St}とする。さらに，この式より，以下の式が求められる。

$$\left(\frac{d_{Al}}{d_{St}}\right)^2 = \frac{\rho_{St}}{\rho_{Al}}$$

鋼の丸棒の断面二次モーメントは，

$$\frac{\pi d_{St}^4}{64} = \frac{\pi}{64}\left(\frac{\rho_{Al}}{\rho_{St}}\right)^2 d_{Al}^4$$

両端固定の柱の座屈荷重および両端回転の座屈荷重は，それぞれ，式 13-14 および式 13-15 より求めることができる。したがって，両端固定のアルミニウム合金の座屈荷重$P_{c,Al}$および両端回転の鋼の丸棒の座屈荷重$P_{c,St}$は，それぞれ，以下のように求めることができる。

$$P_{c,Al} = \frac{4\pi^2 E_{Al} I_{Al}}{l^2} = \frac{\pi^3 \times E_{Al} \times d_{Al}^4}{16 \times l^2}$$

$$P_{c,St} = \frac{\pi^2 E_{St} I_{St}}{l^2} = \frac{\pi^3 \times E_{St} \times \left(\frac{\rho_{Al}}{\rho_{St}}\right)^2 \times d_{Al}^4}{64 \times l^2}$$

アルミニウム合金の丸棒と鋼の丸棒の座屈荷重の比は，

$$\frac{P_{c,Al}}{P_{c,st}} = \frac{E_{Al}}{\frac{1}{4} \times E_{St} \times \left(\frac{\rho_{Al}}{\rho_{St}}\right)^2} = \frac{(70 \times 10^9)}{\frac{1}{4} \times (206 \times 10^9) \times \left(\frac{2.7}{7.8}\right)^2} \approx 11.3$$

すなわち，両端固定のアルミニウム合金の丸棒の座屈荷重は，両端回転の鋼の丸棒の座屈荷重の約 11 倍程度である。

13-B3

両端回転の柱の座屈荷重P_cは，式 13-15 より求めることができる。中空丸棒の断面二次モーメントは例題 6-3 を参考に求めることができる。断面積をAとすると，座屈応力σ_cは,

$$\sigma_c = \frac{P_c}{A} = \frac{\pi^2 EI}{Al^2} = \frac{\pi^2 E \frac{\pi}{64}\left(d_1^4 - d_2^4\right)}{\frac{\pi}{4}\left(d_1^2 - d_2^2\right) l^2} =$$

$$\frac{\pi^2 E\left(d_1^2 + d_2^2\right)}{16 l^2} = \frac{\pi^2 E d_1^2 (1 + m^2)}{16 l^2}$$

降伏応力をσ_Yとする。座屈よりも降伏が先に生じるときは， $\sigma_c > \sigma_Y$のときである。すなわち,

$$\frac{\pi^2 E d_1^2 (1 + m^2)}{16 l^2} > \sigma_Y$$

となる。それぞれの値を代入すると,

$$(1 + m^2) > \frac{16 \times 2^2 \times (330 \times 10^6)}{\pi^2 \times (206 \times 10^9)(100 \times 10^{-3})^2}$$

したがって，座屈よりも降伏が先に生じるときの条件は,

$$m > 0.2$$

となる。