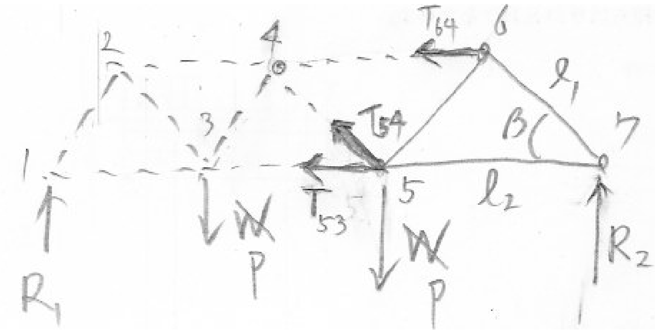
14-A1

（1）

切断法を用いて、軸力 T_{35}、T_{45}、T_{46} を求める。

求めようとする部材を通る切断面を考える。



○全体の上下方向のつり合いは、以下の通りになる。

$R_1 + R_2 - P - P = 0 \cdots$①

$R_1 = R_2 \cdots$②

よって、

$R_2 = P \cdots$③

とできる。

○点 5 まわりのモーメントのつりあいは、次の通りになる。

$R_2 l_2 + T_{64} l_1 \sin\beta = 0 \cdots$④

④より、$T_{64} = \dfrac{l_2 R_2}{l_1 \sin\beta} \cdots$⑤

$l_1 \cos\beta = \dfrac{l_2}{2} \cdots$⑥

⑥より、$l_2 = 2 l_1 \cos\beta \cdots$⑦

$T_{64} = -T_{46} \cdots$⑧

⑤に③、⑦、⑧を代入すると、次の式が求められる。

$$T_{46} = \frac{2l_1 \cos\beta}{l_1 \sin\beta} P = \frac{2P}{\tan\beta} \cdots ⑨$$

○点 4 まわりのモーメントのつり合いは、次の通りになる。

$$-P\frac{l_2}{2} + R_2 \frac{3}{2} l_2 - T_{43} l_1 \sin\beta = 0 \cdots ⑩$$

⑩を変形すると、

$$\frac{l_2}{2}(-P + 3R_2) - T_{43} l_1 \sin\beta = 0 \cdots ⑪$$

となり、これに③と⑦を代入すると、

$$\frac{2l_1 \cos\beta}{2}(2P) - T_{43} l_1 \sin\beta = 0 \cdots ⑫$$

となる。⑫から、

$$T_{43} = \frac{2Pl_1 \cos\beta}{l_1 \sin\beta} = \frac{2P}{\tan\beta} \cdots ⑬$$

となる。以上より、

$$T_{34} = -\frac{2P}{\tan\beta} \cdots ⑭$$

が求められる。

○x 軸方向の力のつり合い（2Fₓ＝0）

$$-T_{54}\cos\beta - T_{43} - T_{64} = 0 \cdots ⑮$$

⑮を変形し、⑨と 14 を代入すると、以下の通りとなる。

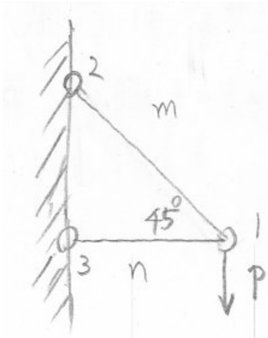
$$T_{54} = \frac{-1}{\cos\beta}(T_{43} + T_{64}) = \frac{-1}{\cos\beta}\left(\frac{2P}{\tan\beta} - \frac{2P}{\tan\beta}\right) = 0$$

よって、$T_{54}\ =\ 0 \cdots ⑰$

となる。

14-A2

図 14-11 において $\theta = 45^\circ$ の時の全体剛性マトリックスを求めると、次のようになる。



$$\sin 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}、\cos 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\sin 45^\circ \cos 45^\circ = \frac{1}{2}$$

$$\sin^2 45^\circ = \frac{1}{2}、\cos^2 45^\circ = \frac{1}{2}$$

式 14-38 に代入すると、以下の通りとなり、全体剛性マトリックス$[K]_{mn}$が求められる。

$$\{F\}_{mn} = \begin{Bmatrix} 0 \\ -P \\ X_2 \\ Y_2 \\ X_3 \\ Y_3 \end{Bmatrix} = \frac{AE}{l}\frac{\sqrt{2}}{2}\begin{bmatrix} \frac{1}{2}+\frac{2}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ -\frac{2}{\sqrt{2}} & 0 & 0 & 0 & \frac{2}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} u_1 \\ u_1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{4}\frac{AE}{l}\begin{bmatrix} 1+2\sqrt{2} & -1 & -1 & 1 & \sqrt{2} & 0 \\ -1 & 1 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ -2\sqrt{2} & 0 & 0 & 0 & 2\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} u_1 \\ u_1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} = [K]_{mn}\begin{Bmatrix} u_1 \\ u_1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

14-A3

節点 1 における軸成分（X_1,Y_2）を求めると、上記 14-A2 より、以下の通りとなる。

$$\begin{Bmatrix} X_1 \\ Y_1 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ -P \end{Bmatrix}$$

14-A4

節点 1 における変異成分（u_1,v_2）を求めると、上記 14-A2 より、以下の通りとなる。

$$\begin{Bmatrix} X_1 \\ Y_1 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ -P \end{Bmatrix} = \frac{\sqrt{2}AE}{4l} \begin{bmatrix} 1+2\sqrt{2} & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ v_1 \end{Bmatrix} \cdots ①$$

①から、次のようにできる。

$$\frac{4l}{\sqrt{2}AE} \begin{Bmatrix} 0 \\ -P \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1+2\sqrt{2} & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ v_1 \end{Bmatrix} \cdots ②$$

②から、次のように求められる。

$$\begin{Bmatrix} u_1 \\ v_1 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1+2\sqrt{2} & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}^{-1} \frac{4l}{\sqrt{2}AE} \begin{Bmatrix} 0 \\ -P \end{Bmatrix}$$

$$= \frac{1}{(1+2\sqrt{2})-1} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1+2\sqrt{2} \end{bmatrix} \frac{4l}{\sqrt{2}AE} \begin{Bmatrix} 0 \\ -P \end{Bmatrix}$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{2}} \frac{4l}{\sqrt{2}AE} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1+2\sqrt{2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0 \\ -P \end{Bmatrix}$$

$$= \frac{l}{AE} \begin{Bmatrix} -P \\ -P(1+2\sqrt{2}) \end{Bmatrix} = \frac{-Pl}{AE} \begin{Bmatrix} 1 \\ 1+2\sqrt{2} \end{Bmatrix} \cdots ③$$

【別解】

式 14-39 より、以下のようにも計算できる。

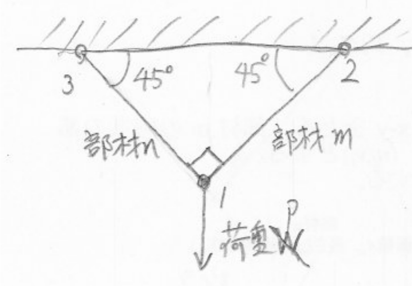
$$
\begin{Bmatrix} u_1 \\ v_1 \end{Bmatrix} = \frac{Pl}{AE}\begin{Bmatrix} -\dfrac{1}{\tan\theta} \\ -\dfrac{\cos^3\theta + 1}{\sin^2\theta\cos\theta} \end{Bmatrix} = \frac{-Pl}{AE}\begin{Bmatrix} 1 \\ \dfrac{\dfrac{\sqrt{2}}{4}+1}{\dfrac{\sqrt{2}}{4}} \end{Bmatrix} = \frac{-Pl}{AE}\begin{Bmatrix} 1 \\ \dfrac{\sqrt{2}+4}{\sqrt{2}} \end{Bmatrix}
$$

$$
= \frac{-Pl}{AE}\begin{Bmatrix} 1 \\ \dfrac{2+4\sqrt{2}}{2} \end{Bmatrix}
$$

$$
= \frac{-Pl}{AE}\begin{Bmatrix} 1 \\ 1+2\sqrt{2} \end{Bmatrix}
$$

14-B1

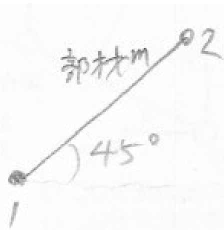
節点2と3の角度が45°になったときの要素剛性マトリックス[K]mと[Kn]を求める。



式14-26より、以下のように表せる。

$$[K]_m = \frac{AE}{l}\begin{bmatrix} \cos^2\alpha & \sin\alpha\cos\alpha & -\cos^2\alpha & -\sin\alpha\cos\alpha \\ \sin\alpha\cos\alpha & \sin^2\alpha & -\sin\alpha\cos\alpha & -\sin^2\alpha \\ -\cos^2\alpha & -\sin\alpha\cos\alpha & \cos^2\alpha & \sin\alpha\cos\alpha \\ -\sin\alpha\cos\alpha & -\sin^2\alpha & \sin\alpha\cos\alpha & \sin^2\alpha \end{bmatrix}$$

○部材mについてはα＝45°であるから、以下の関係が成り立つ。



$$\sin 45° = \cos 45° = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\sin^2 45° = \cos^2 45° = \sin 45°\cos 45° = \frac{1}{2}$$

よって、以下の通りとなる。

$$[K]_m = \frac{A_m E_m}{l_m}\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

$$=\frac{A_m E_m}{2l_m}\begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 & 1 \end{bmatrix}\cdots①\text{-}1$$

○部材 n については $\alpha=135°$ であるから、以下の関係が成り立つ。

$$\sin 135° = \cos 135° = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\sin^2 135° = \cos^2 135° = \frac{1}{2}$$

$$\sin 135° \cos 135° = -\frac{1}{2}$$

よって、以下の通りとなる。

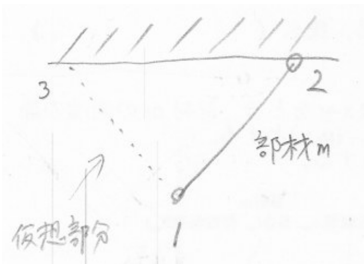
$$[K_n] = \frac{A_n E_n}{l_n}\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

$$=\frac{A_n E_n}{2l_n}\begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}\cdots①\text{-}2$$

14-B2

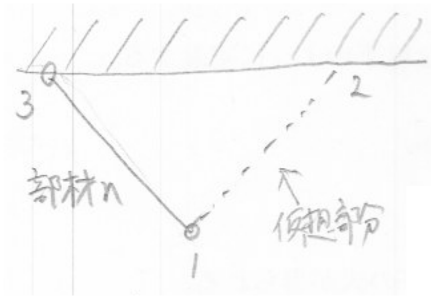
$A_m = A_n = A$、$E_m = E_n = E$、$l_m = l_n = l$ の時の、全体剛性マトリックス$[K]_{mn}$を求める。

○$[K]_m$を拡張すると、式①-1 より部材 m の剛性方程式は、以下の通り書き表せる。



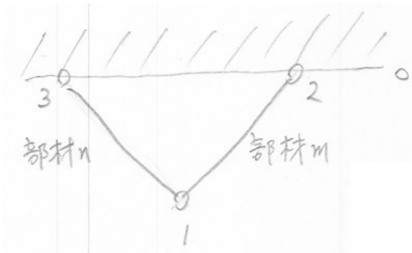
$$\{F\}_m = \begin{Bmatrix} X_1 \\ Y_1 \\ X_2 \\ Y_2 \end{Bmatrix} = \frac{A_m E_m}{2l_m} \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ u_2 \\ v_2 \\ u_3 \\ v_3 \end{Bmatrix} \cdots ②\text{-}1$$

○同様に$[K]_n$を拡張すると、式①-2 より以下のようにできる。



$$\{F\}_n=\begin{Bmatrix} X_1\\ Y_1\\ X_3\\ Y_3 \end{Bmatrix}=\frac{A_nE_n}{2l_n}\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & -1 & 1\\ -1 & 1 & 0 & 0 & 1 & -1\\ -1 & 1 & 0 & 0 & 1 & -1\\ 1 & -1 & 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} u_1\\ v_1\\ u_2\\ v_2\\ u_3\\ v_3 \end{Bmatrix}\cdots②\text{-}2$$

〇以上より、$A_m=A_n=A$、$E_m=E_n=E$、$l_m=l_n=l$ の時の、部材 m と部材 n を組み合わせた全体剛性方程式は、式②-1 と②-2 より、以下の通りとなるので、全体剛性マトリックス$[K]_{mn}$は以下の通りとなる。



$$\{F\}_{mn}=\begin{Bmatrix} X_1\\ Y_1\\ X_2\\ Y_2\\ X_3\\ Y_3 \end{Bmatrix}=\frac{AE}{2l}\begin{bmatrix} 1+1 & 1-1 & -1+0 & -1+0 & 0-1 & 0+1\\ 1-1 & 1+1 & -1+0 & -1+0 & 0+1 & 0-1\\ -1 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0\\ -1 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0\\ -1 & 1 & 0 & 0 & 1 & -1\\ 1 & -1 & 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} u_1\\ v_1\\ u_2\\ v_2\\ u_3\\ v_3 \end{Bmatrix}$$

$$=\frac{AE}{2l}\begin{bmatrix} 2 & 0 & -1 & -1 & -1 & 1\\ 0 & 2 & -1 & -1 & 1 & -1\\ -1 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0\\ -1 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0\\ -1 & 1 & 0 & 0 & 1 & -1\\ 1 & -1 & 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} u_1\\ v_1\\ u_2\\ v_2\\ u_3\\ v_3 \end{Bmatrix}=[K]_{mn}\begin{Bmatrix} u_1\\ v_1\\ u_2\\ v_2\\ u_3\\ v_3 \end{Bmatrix}\cdots②\text{-}3$$

14-B3

節点 1 の変位を求める。

節点 1 に荷重 P が与えられており、節点 2 および節点 3 は固定されているので、式 14-37 と同様に、

$$\begin{Bmatrix} X_1 \\ Y_1 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ -1 \end{Bmatrix} P 、 \begin{Bmatrix} u_2 \\ v_2 \\ u_3 \\ v_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \cdots ③\text{-}1$$

とできる。式②-3 より以下のようにできる。

$$\begin{Bmatrix} X_1 \\ Y_1 \end{Bmatrix} = \frac{AE}{2l} \begin{bmatrix} 2 & 0 & -1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & -1 & 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ u_2 \\ v_2 \\ u_3 \\ v_3 \end{Bmatrix} \cdots ③\text{-}2$$

③-1 と③-2 より、以下の通り求めることができる。

$$\begin{Bmatrix} X_1 \\ Y_1 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ -1 \end{Bmatrix} P = \frac{AE}{2l} \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ v_1 \end{Bmatrix} \cdots ③\text{-}3$$

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ v_1 \end{Bmatrix} = \frac{2Pl}{AE} \begin{Bmatrix} 0 \\ -1 \end{Bmatrix}$$

$$\begin{Bmatrix} u_1 \\ v_1 \end{Bmatrix} = \frac{2Pl}{AE} \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}^{-1} \begin{Bmatrix} 0 \\ -1 \end{Bmatrix}$$

$$= \frac{2Pl}{AE} \frac{1}{4-0} \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0 \\ -1 \end{Bmatrix} = \frac{Pl}{2AE} \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0 \\ -1 \end{Bmatrix} = \frac{Pl}{2AE} \begin{Bmatrix} 0 \\ -2 \end{Bmatrix}$$

$$= \begin{Bmatrix} 0 \\ -\dfrac{Pl}{AE} \end{Bmatrix} \cdots ③\text{-}4$$

14-B4

軸方向の伸びλ m、λ n ならびに軸力 N_m、N_n を求める。

軸方向の伸びは式 14-23 と式③-4 より以下の通りに表せる。

$$\lambda_m = (u_2 - u_1)\cos 45^\circ + (v_2 - v_1)\sin 60^\circ = 0 + \left\{ 0 - \left(-\frac{Pl}{AE} \right) \right\} \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$= \frac{\sqrt{2}Pl}{2AE} \cdots ④\text{-}1$$

$$\lambda_n = (u_3 - u_1)\cos 135^\circ + (v_3 - v_1)\sin 135^\circ = 0 + \left\{ 0 - \left(-\frac{Pl}{AE} \right) \right\} \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$= \frac{\sqrt{2}Pl}{2AE} \cdots ④\text{-}2$$

軸力は式 14-24 と④-1、④-2 より以下の通りとなる。

$$N_m = \frac{AE}{l}\lambda_m = \frac{AE}{l}\frac{\sqrt{2}Pl}{2AE} = \frac{\sqrt{2}}{2}P$$

$$N_n = \frac{AE}{l}\lambda_n = \frac{AE}{l}\frac{\sqrt{2}Pl}{2AE} = \frac{\sqrt{2}}{2}P$$