1.

巻末解答の通り

2.

（1）

1）

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2-2-9 \\ 0-1-6 \\ 6-2+0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -9 \\ -7 \\ 4 \end{bmatrix}$$

2）

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1+2 & 2-2 & 3+6 \\ 3+1 & 6-1 & 9+3 \\ -1+1 & -2-1 & -3+3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 9 \\ 4 & 5 & 12 \\ 0 & -3 & 0 \end{bmatrix}$$

3）

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & 2 & -3 \\ 4 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4-4+1 & 4+1+1 & -6-1+0 \\ 4+12+1 & 4-3+1 & -6+3+0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 6 & -7 \\ 17 & 2 & -3 \end{bmatrix}$$

4）

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & 4 & -1 \\ 3 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2+6+1 & 4+0-1 & -1+2+4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 & 3 & 5 \end{bmatrix}$$

(2)

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \\ 3 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \\ -2 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$$

上記の赤枠について、以下の通りに名前を付ける。

$$\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{bmatrix}$$

2 行×2 行の計算とみなせるので、この行列の積は以下の通りになる。

$$\begin{bmatrix} A_{11}B_{11} + A_{12}B_{21} & A_{11}B_{12} + A_{12}B_{22} \\ A_{21}B_{11} + A_{22}B_{21} & A_{21}B_{12} + A_{22}B_{22} \end{bmatrix}$$

ここで、それぞれの要素を計算すると、以下の通りになる。

$$A_{11}B_{11} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2+1 \\ 0+1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$A_{12}B_{21} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -2 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2+0 \\ -4-2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ -6 \end{bmatrix}$$

$$A_{11}B_{11} + A_{12}B_{21} = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -2 \\ -6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -5 \end{bmatrix}$$

$$A_{11}B_{12} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2+0 \\ 0+0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$A_{12}B_{22} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1+0 \\ 2-1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$A_{11}B_{12}+A_{12}B_{22}=\begin{bmatrix}-2\\0\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-1\\1\end{bmatrix}$$

$$A_{21}B_{11}=\begin{bmatrix}3&1\\0&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3+1\\0+0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}4\\0\end{bmatrix}$$

$$A_{22}B_{21}=\begin{bmatrix}0&1\\1&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-2\\2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0+2\\-2+2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2\\0\end{bmatrix}$$

$$A_{21}B_{11}+A_{22}B_{21}=\begin{bmatrix}4\\0\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}2\\0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}6\\0\end{bmatrix}$$

$$A_{21}B_{12}=\begin{bmatrix}3&1\\0&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-1\\0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-3+0\\0+0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-3\\0\end{bmatrix}$$

$$A_{22}B_{22}=\begin{bmatrix}0&1\\1&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0+1\\1+1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix}$$

$$A_{21}B_{12}+A_{22}B_{22}=\begin{bmatrix}-3\\0\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-2\\2\end{bmatrix}$$

以上より、

$$\begin{bmatrix}2&1&1&0\\0&1&2&-1\\3&1&0&1\\0&0&1&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&-1\\1&0\\-2&1\\2&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&-1\\-5&1\\6&-2\\0&2\end{bmatrix}$$

となる。

(3)

$x + 3y + z = 2$

$2x + 7y - z = -3$

$-x + 2y + 3z = 1$

上記連立方程式を行列で表すと、以下の通りになる。

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 2 & 7 & -1 \\ -1 & 2 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ -3 \\ 1 \end{bmatrix}$$

ここで、

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 2 & 7 & -1 \\ -1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$$

と置くと、$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = A^{-1}\begin{bmatrix} 2 \\ -3 \\ 1 \end{bmatrix}$ で求めることができる。

逆行列 A^{-1} を、掃き出し法を用いて求めると、

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 7 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 11 & 5 & 0 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\to \begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 11 & 5 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 5 & 4 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 44 & 20 & 0 & 4 & 8 \\ 0 & 5 & 4 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\to \begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 19 & 0 & -5 & 4 & 3 \\ 0 & 5 & 4 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{5}{19} & \frac{4}{19} & \frac{3}{19} \\ 0 & 5 & 4 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$
\to\begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{5}{19} & \frac{4}{19} & \frac{3}{19} \\ 0 & 0 & 4 & \frac{44}{19} & -\frac{20}{19} & \frac{4}{19} \end{bmatrix}\to\begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{5}{19} & \frac{4}{19} & \frac{3}{19} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{11}{19} & -\frac{5}{19} & \frac{1}{19} \end{bmatrix}
$$

$$
\to\begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 & \frac{8}{19} & \frac{5}{19} & -\frac{1}{19} \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{5}{19} & \frac{4}{19} & \frac{3}{19} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{11}{19} & -\frac{5}{19} & \frac{1}{19} \end{bmatrix}\to\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \frac{23}{19} & -\frac{7}{19} & -\frac{10}{19} \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{5}{19} & \frac{4}{19} & \frac{3}{19} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{11}{19} & -\frac{5}{19} & \frac{1}{19} \end{bmatrix}
$$

となる。以上より、連立方程式は以下の通り解ける。

$$
\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = A^{-1}\begin{bmatrix} 2 \\ -3 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{23}{19} & -\frac{7}{19} & -\frac{10}{19} \\ -\frac{5}{19} & \frac{4}{19} & \frac{3}{19} \\ \frac{11}{19} & -\frac{5}{19} & \frac{1}{19} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 \\ -3 \\ 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{19}\begin{bmatrix} 23 & -7 & -10 \\ -5 & 4 & 3 \\ 11 & -5 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 \\ -3 \\ 1 \end{bmatrix}
$$

$$
= \frac{1}{19}\begin{bmatrix} 46+21-10 \\ -10-12+3 \\ 22+15+1 \end{bmatrix} = \frac{1}{19}\begin{bmatrix} 57 \\ -19 \\ 38 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}
$$

【別解】

逆行列 A^{-1} は、行列式を用いて次のように求めることもできる。

$$
A^{-1} = \frac{1}{|A|}\widetilde{A}
$$

ここで、$|A|$ は、次のように求められる。

$$
\begin{aligned}
|A| &= 1\times 7\times 3+3\times(-1)\times(-1)+1\times 2\times 2-1\times 2\times(-1)-3\times 2\times 3-1\times 7\times(-1) \\
&= 21+3+4+2-18+7 \\
&= 19
\end{aligned}
$$

よって、$|A|$は正則である。$|A|$が正則であるため、$\tilde{A}$は、次のように求められる。

$$
\tilde{A}=\begin{bmatrix}
(-1)^2\times(7\times 3-(-1)\times 2) & (-1)^3\times(3\times 3-2\times 1) & (-1)^4\times(3\times(-1)-7\times 1) \\
(-1)^3\times(2\times 3-(-1)\times(-1)) & (-1)^4\times(1\times 3-1\times(-1)) & (-1)^5\times(1\times(-1)-1\times 2) \\
(-1)^4\times(2\times 2-7\times(-1)) & (-1)^5\times(1\times 2-3\times(-1)) & (-1)^6\times(1\times 7-2\times 3)
\end{bmatrix}
$$

$$
=\begin{bmatrix}
23 & -7 & -10 \\
-5 & 4 & 3 \\
11 & -5 & 1
\end{bmatrix}
$$

よって、逆行列A^{-1}は、以下のようになる。

$$
A^{-1}=\frac{1}{19}\begin{bmatrix}
23 & -7 & -10 \\
-5 & 4 & 3 \\
11 & -5 & 1
\end{bmatrix}
$$

後は、上記の解答と同じように解ける。