7 - A1

A 点から x の位置の曲げモーメント M は、

$$M = \frac{wl}{2}x - \frac{wx^2}{2} = \frac{w}{2}(lx - x^2) \cdots ①$$

したがって、たわみの微分方程式は、

$$\frac{d^2v}{dx^2} = -\frac{M}{EI} = -\frac{w}{2EI}(lx - x^2) \cdots ②$$

この式を順次積分すると、

$$\frac{dv}{dx} = i = -\frac{w}{2EI}(\frac{lx^2}{2} - \frac{x^3}{3} + C_1) \cdots ③$$

$$v = -\frac{w}{2EI}(\frac{lx^3}{6} - \frac{x^4}{12} + C_1x + C_2) \cdots ④$$

となる。ここで、C_1、C_2 は積分定数である。

境界条件は、A 点（x＝0）で、たわみ v＝0、B 点（x＝l）でたわみ v＝0。これらの条件を③式、④式に代入すると、

$$C_1 = -\frac{l^3}{12}、\ C_2 = 0$$

が求められる。

したがって、たわみ角 i、たわみ v を求める式は、下記のようになる。

$$i = \frac{w}{24EI}(4x^3 - 6lx^2 + l^3) \cdots ⑤$$
$$v = \frac{w}{24EI}(x^4 - 2lx^3 + l^3x) \cdots ⑥$$

左右対称なので、最大たわみ $v_{\max}$ は、はりの中央（$x = \frac{l}{2}$）で生じ、その大きさは、

$$v_{\max} = \frac{5wl^4}{384EI}$$

となる。b＝12mm、h=18mm、l=1m、w＝800N/m、E=206GPa の場合、

$$v_{\max} = 8.67mm$$

7 - A2

A 点から x の位置の曲げモーメント M は、

$$M=\frac{x}{l}(M_B-M_A)+M_A\cdots①$$

したがって、たわみの微分方程式は、

$$\frac{d^2v}{dx^2}=-\frac{M}{EI}=-\frac{1}{EI}\left\{\frac{x}{l}(M_B-M_A)+M_A\right\}\cdots②$$

この式を順次積分すると、

$$\frac{dv}{dx}=i=-\frac{1}{EI}\left\{\frac{x^2}{2l}(M_B-M_A)+M_Ax+C_1\right\}\cdots③$$

$$v=-\frac{1}{EI}\left\{\frac{x^3}{6l}(M_B-M_A)+\frac{M_A}{2}x^2+C_1x+C_2\right\}\cdots④$$

となる。ここで、C_1、C_2 は積分定数である。

境界条件は、A 点（x＝0）で、たわみ v＝0、B 点（x＝l）でたわみ v＝0。これらの条件を③式、④式に代入すると、

$$C_1=-\frac{l}{6}(2M_A+M_B)、\ C_2=0$$

が求められる。

したがって、たわみ角 i、たわみ v を求める式は、下記のようになる。

$$i=\frac{1}{EI}\left\{\frac{x^2}{2l}(M_B-M_A)+M_Ax-\frac{l}{6}(2M_A+M_B)\right\}$$

$$v=-\frac{1}{EI}\left\{\frac{x^3}{6l}(M_B-M_A)+\frac{M_A}{2}x^2-\frac{l}{6}(2M_A+M_B)x\right\}$$

7 - B1

A 点から x の位置の曲げモーメント M は、

$$M = -\frac{w_1 x^2}{6l}(3l - x) = -\frac{w_1}{6l}(3lx^2 - x^3) \cdots ①$$

したがって、たわみの微分方程式は、

$$\frac{d^2 v}{dx^2} = -\frac{M}{EI} = \frac{w_1}{6lEI}(3lx^2 - x^3) \cdots ②$$

この式を順次積分すると、

$$\frac{dv}{dx} = i = \frac{w_1}{6lEI}(lx^3 - \frac{x^4}{4} + C_1) \cdots ③$$

$$v = \frac{w_1}{6lEI}(\frac{lx^4}{4} - \frac{x^5}{20} + C_1 x + C_2) \cdots ④$$

となる。ここで、C_1、C_2 は積分定数である。

境界条件は、B 点（x＝l）で、たわみ角 i＝0、たわみ v＝0。

これらの条件を③式、④式に代入すると、

$$C_1 = -\frac{3l^4}{4}、\ C_2 = \frac{11l^5}{20}$$

が求められる。

したがって、たわみ角 i、たわみ v を求める式は、下記のようになる。

$$i = \frac{w_1}{6lEI}(-\frac{x^4}{4} + lx^3 - \frac{3l^4}{4}) = \frac{w_1}{24lEI}(-x^4 + 4lx^3 - 3l^4)$$

$$v = \frac{w_1}{6lEI}(-\frac{x^5}{4} + \frac{lx^4}{4} - \frac{3l^4}{4}x + \frac{11l^5}{20})$$

$$= \frac{w_1}{120lEI}(-x^5 + 5lx^4 - 15l^4 x + 11l^5)$$

7 - B2

AC 間の曲げモーメント M_{AC} は、

$$M_{AC}=\frac{M_C}{l}x\cdots①$$

CB 間の曲げモーメント M_{CB} は、

$$M_{CB}=\frac{M_C}{l}x-M_C=\frac{M_C}{l}(x-l)\cdots②$$

したがって、たわみの微分方程式は、

$$\frac{d^2v_{AC}}{dx^2}=-\frac{M_{Ac}}{EI}=-\frac{M_C}{EIl}x\cdots③$$

$$\frac{d^2v_{CB}}{dx^2}=-\frac{M_{cB}}{EI}=-\frac{M_C}{EIl}(x-l)\cdots④$$

となる。それぞれ順次積分すると、

$$\frac{dv_{AC}}{dx}=i_{AC}=-\frac{M_C}{EIl}(\frac{x^2}{2}+C_1)\cdots⑤$$

$$v_{AC}=-\frac{M_C}{EIl}(\frac{x^3}{6}+C_1x+C_2)\cdots⑥$$

$$\frac{dv_{CB}}{dx}=i_{CB}=-\frac{M_C}{EIl}(\frac{(x-l)^2}{2}+C_3)\cdots⑦$$

$$v_{CB}=-\frac{M_C}{EIl}(\frac{(x-l)^3}{6}+C_3(x-l)+C_4)\cdots⑧$$

となる。ここで、C_1～C_4 は積分定数である。

境界条件は、以下の 4 つとなる。

・A 点（x＝0）でたわみ v_{AC}＝0

・B 点（x＝l）でたわみ v_{CB}＝0

・C 点（x＝a）でたわみ角 i_{AC} と i_{CB} が同じ。

・C 点（x＝a）でたわみ v_{AC} と v_{CB} が同じ。

これらの条件を⑤式～⑧式に代入すると、

$C_1=-\frac{1}{6l}(2b^3-3ab^2-a^3)$、$C_2=0$、$C_3=-\frac{1}{6l}(2a^3-3ab^2-b^3)$、$C_4=0$

が求められる。
したがって、たわみ角とたわみの式は、下記のようになる。

$$i_{AC} = -\frac{M_C}{EIl}\left\{\frac{x^2}{2} + \frac{1}{6l}(2b^3 - 3ab^2 - a^3)\right\}$$

$$v_{AC} = -\frac{M_C}{EIl}\left\{\frac{x^3}{6} + \frac{x}{6l}(2b^3 - 3ab^2 - a^3)\right\}$$

$$i_{CB} = -\frac{M_C}{EIl}\left\{\frac{(x-l)^2}{2} + \frac{1}{6l}(2a^3 - 3ab^2 - b^3)\right\}$$

$$v_{CB} = -\frac{M_C}{EIl}\left\{\frac{(x-l)^3}{6} + \frac{x-l}{6l}(2a^3 - 3ab^2 - b^3)\right\}$$

7 - B3

A 点から x の位置の曲げモーメント M は、AC 間、CB 間ともに、

$M = -Px \cdots$①

・AC 間のたわみの微分方程式は、

$$\frac{d^2 v_{AC}}{dx^2} = \frac{P}{EI_1} x \cdots ②$$

となる。順次積分すると、

$$\frac{dv_{AC}}{dx} = i_{AC} = \frac{P}{EI_1}(\frac{x^2}{2} + C_1) \cdots ③$$

$$v_{AC} = \frac{P}{EI_1}(\frac{x^3}{6} + C_1 x + C_2) \cdots ④$$

・CB 間のたわみの微分方程式は、

$$\frac{d^2 v_{CB}}{dx^2} = \frac{P}{EI_2} x \cdots ⑤$$

となる。順次積分すると、

$$\frac{dv_{CB}}{dx} = i_{CB} = \frac{P}{EI_2}(\frac{x^2}{2} + C_3) \cdots ⑥$$

$$v_{CB} = \frac{P}{EI_2}(\frac{x^3}{6} + C_3 x + C_4) \cdots ⑦$$

となる。ここで、C_1～C_4 は積分定数である。

CB 間の境界条件は、B 点（x＝l）でたわみ角 i_{CB}＝0、たわみ v_{CB}＝0。

これらの条件を⑥式と⑦式に代入すると、

$C_3 = -\frac{l^2}{2}$、 $C_4 = \frac{l^3}{3}$

が求められる。

AC 間の境界条件は、C 点（x＝l/2）で i_{AC}＝i_{CB}、v_{AC}＝v_{CB} 。

これらの条件を③式と④式に代入すると、

$$C_1 = -\frac{3l^2 I_1}{8I_2} - \frac{l^2}{8}、\ C_2 = \frac{7l^3 I_1}{24I_2} - \frac{l^3}{24}$$

が求められる。

したがって、AC 間のたわみ角 i_{AC} とたわみ v_{AC} を求める式は、

$$i_{AC} = \frac{P}{EI_1}\left(\frac{x^2}{2} - \frac{3l^2 I_1}{8I_2} - \frac{l^2}{8}\right) \cdots ⑧$$

$$v_{AC} = \frac{P}{EI_1}\left(\frac{x^3}{6} - \frac{3l^2 I_1}{8I_2}x - \frac{l^2}{8}x + \frac{7l^3 I_1}{24I_2} - \frac{l^3}{24}\right) \cdots ⑨$$

また、CB 間のたわみ角 i_{CB} とたわみ v_{CB} を求める式は、

$$i_{CB} = \frac{P}{EI_2}\left(\frac{x^2}{2} - \frac{l^2}{2}\right) = \frac{P}{2EI_2}(x^2 - l^2) \cdots ⑩$$

$$v_{CB} = \frac{P}{EI_2}\left(\frac{x^3}{6} - \frac{l^2}{2}x + \frac{l^3}{3}\right) = \frac{P}{6EI_2}(x^3 - 3l^2 x + 2l^3) \cdots ⑪$$

となる。

題意より、I_2＝$2I_1$ なので、これを⑧式、⑨式に代入すれば、i_{AC} と v_{AC} は以下のように求めることができる。

$$i_{AC} = \frac{P}{EI_1}\left(\frac{x^2}{2} - \frac{5l^2}{16}\right) = \frac{P}{16EI_1}(8x^2 - 5l^2) \cdots ⑫$$

$$v_{AC} = \frac{P}{EI_1}\left(\frac{x^3}{6} - \frac{5l^2}{16}x + \frac{9l^3}{48}\right) = \frac{P}{48EI_1}(8x^3 - 15l^2 x + 9l^3) \cdots ⑬$$