8 - A1

図のように、反力 R_A、R_B、モーメント M_A、M_B を仮定する。

力のつり合い式

$R_A + R_B - wl = 0 \cdots ①$

A 点まわりのモーメントのつり合い式

$$-M_A + M_B + R_B l - \frac{wl^2}{2} = 0 \cdots ②$$

左右対称なので、

$$R_A = R_B = \frac{wl}{2} \cdots ③$$

$M_A = M_B \cdots ④$

A 点から距離 x の位置の曲げモーメント M は、

$$M = R_A x - \frac{wx^2}{2} + M_A = \frac{wxl}{2} - \frac{wx^2}{2} + M_A \cdots ⑤$$

したがって、たわみの微分方程式は、

$$\frac{d^2v}{dx^2} = -\frac{M}{EI} = -\frac{1}{EI}(M_A - \frac{wx^2}{2} + \frac{wl}{2}x) \cdots ⑥$$

この式を順次積分すると、

$$\frac{dv}{dx} = i = -\frac{1}{EI}(M_A x - \frac{wx^3}{6} + \frac{wl}{4}x^2 + C_1) \cdots ⑦$$

$$v = -\frac{1}{EI}(\frac{M_A}{2}x^2 - \frac{w}{24}x^4 + \frac{wl}{12}x^3 + C_1 x + C_2) \cdots ⑧$$

となる。ここで、C_1、C_2 は積分定数である。

境界条件

A 点（x＝0）で、たわみ角 i=0、たわみ v＝0。

これらの条件を⑦式、⑧式に代入すると、$C_1 = 0$、$C_2 = 0$ が求められる。したがって、

$$\frac{dv}{dx} = i = -\frac{1}{EI}(M_A x - \frac{wx^3}{6} + \frac{wl}{4}x^2) \cdots ⑨$$

$$v = -\frac{1}{EI}(\frac{M_A}{2}x^2 - \frac{w}{24}x^4 + \frac{wl}{12}x^3) \cdots ⑩$$

境界条件

B 点（x＝l）で、たわみ角 i=0。この条件を⑨式に代入すると、

$$M_A = -\frac{wl^2}{12} \cdots ⑪$$

が得られる。なお、もう一つの境界条件 B 点（x＝l）でたわみ v=0 を 10 式に代入しても同じ結果が得られる。

したがって、たわみ角 i、たわみ v の式は、

$$i = -\frac{wx}{12EI}(-l^2 - 2x^2 + 3lx) = \frac{wx}{12EI}(l - x)(l - 2x) \cdots ⑫$$

$$v = -\frac{wx^2}{24EI}(-l^2 - x^2 - 2lx) = \frac{wx^2}{12EI}(l - x)^2 \cdots ⑬$$

最大たわみ v_{max} は、中央（x=l/2）で生じるので、⑬式に x=l/2 を代入して、

$$v_{\max} = \frac{wl^4}{384EI}$$

となる。

8 - A2

B 点、C 点、D 点での曲げモーメントを M_B、M_C、M_D と仮定すると、3 モーメントの定理から、

$$M_B 2a + 2M_C(2a+2a) + M_D 2a = 6EI(i_{c1} - i_{c2}) \cdots ①$$

となる。ここで、i_{c1} は BC 間を分割して独立した両端支持はりとしたときの C 点でのたわみ角、i_{c2} は同様に CD 間を独立させた両端支持はりの、C 点でのたわみ角である。

A 点から右方向に x をとると、AB 間の曲げモーメント M_{AB} は，$M_{AB}=-Px$ となるので、B 点での曲げモーメント M_B は、

$$M_B = -Pa \cdots ②$$

となる。次に BC 間を独立させた両端支持はりは、全域に等分布荷重が作用しているので、C 点でのたわみ角 i_{c1} は

$$i_{C1} = -\frac{w(2a)^3}{24EI} \cdots ③$$

となる。

CD 間を独立させた両端支持はりには、外力が作用していないので、たわみは生じない。したがって、C 点でのたわみ角 i_{c2} は、

$$i_{C2} = 0 \cdots ④$$

である。さらに、支持点 D にはモーメントが作用していないので、

$$M_D = 0 \cdots ⑤$$

となる。

したがって、②式～⑤式を①式に代入して整理すると、

$$M_C = \frac{Pa}{4} - \frac{wa^2}{4} \cdots ⑥$$

となる。

一方、BC 間作用する曲げモーメント M_{BC} は、B 点から右方向に x をとると、

$$M_{BC} = -P(a+x) + R_B x - \frac{wx^2}{2}$$

なので、C 点での曲げモーメント M_C は，x=2a を代入して、

$$M_C = -3aP + 2aR_B - 2wa^2 \cdots ⑦$$

となる。したがって、⑥式＝⑦式から、

$$R_B = \frac{1}{8}(13P + 7wa) \cdots ⑧$$

となる。

次に、CD 間に作用する曲げモーメント M_{CD} は，D 点から左方向に x をとると、M_{CD}＝$R_D x$ なので、C 点での曲げモーメント M_C は、x=2a とすればよく、

$$M_C = R_D 2a \cdots ⑨$$

となる。⑥式＝⑨式として、

$$R_D = \frac{1}{8}(P - wa) \cdots ⑩$$

はり全体の力のつり合いは、

$$-P + R_B - 2wa + R_C + R_D = 0 \cdots ⑪$$

となるので、⑧式、⑩式を⑪式に代入すると、

$$R_C = \frac{1}{4}(5wa - 3P) \cdots ⑫$$

となる。

8 - A3

曲げモーメントの最大値 M_{max} は，はりの中央で生じる。

$$M_{\max} = \frac{1}{2} \times 250N \times 0.15m = 18.75Nm$$

Al 合金部の断面 2 次モーメントを I_A、鋼板部の断面 2 次モーメントを I_S とすると

$$I_A = \frac{1}{12} \times 10mm \times 10^3 mm = 833.3mm^4 = 8.33 \times 10^{-10} m^4$$

$$I_S = (\frac{1}{12} \times 10mm \times 14^3 mm) - (\frac{1}{12} \times 10mm \times 10^3 mm)$$
$$= 1453.3mm^4 = 14.53 \times 10^{-10} m^4$$

となる。したがって、Al 合金部に生じる最大曲げ応力 σ_A は、

$$\sigma_A = \frac{\mathrm{E_A M_{max}}}{\mathrm{E_A I_A + E_S I_S}} y$$
$$= \frac{(70 \times 10^9) \times 18.75 \times (5 \times 10^{-3})}{(70 \times 10^9) \times (8.33 \times 10^{-10}) + (206 \times 10^9) \times (14.53 \times 10^{-10})}$$
$$= 18.35 \times 10^6 \, N/m^2 = 18.35MPa$$

また、鋼板部に生じる最大曲げ応力 σ_A は、

$$\sigma_\mathrm{S} = \frac{\mathrm{E_S M_{max}}}{\mathrm{E_A I_A + E_S I_S}} y$$
$$= \frac{(206 \times 10^9) \times 18.75 \times (7 \times 10^{-3})}{(70 \times 10^9) \times (8.33 \times 10^{-10}) + (206 \times 10^9) \times (14.53 \times 10^{-10})}$$
$$= 75.60 \times 10^6 \, N/m^2 = 75.60MPa$$

8 - B1

力のつり合いより

$R_A + R_B + R_C - wl = 0 \cdots$①

左右対称なので、

$$R_A = R_B = \frac{1}{2}(wl - R_C) \cdots ②$$

となる。

C 点でのたわみを vC とすると、C 点での力のつり合いから、

$R_C - kv_C = 0 \cdots$③

②式と③式より

$$R_A = R_B = \frac{1}{2}(wl - kv_C) \cdots ④$$

となる。

AC 間の曲げモーメント M_{AC} は、

$$M_{AC} = R_A x - \frac{wx^2}{2} \cdots ⑤$$

なので、たわみの微分方程式は、

$$\frac{d^2v}{dx^2} = -\frac{M_{AC}}{EI} = -\frac{1}{EI}(R_A x - \frac{wx^2}{2}) \cdots ⑥$$

この式を順次積分すると、

$$\frac{dv}{dx} = i = -\frac{1}{EI}(\frac{R_A}{2}x^2 - \frac{w}{6}x^3 + C_1) \cdots ⑦$$

$$v = -\frac{1}{EI}(\frac{R_A}{6}x^3 - \frac{w}{24}x^4 + C_1 x + C_2) \cdots ⑧$$

境界条件

A 点（x=0）で、たわみ v=0 を⑧式に代入すると、

C_2=0…⑨

左右対称なので、C 点（x=l/2）でたわみ角 i=0 を⑦式に代入すると、

$$C_1 = \frac{l^2}{8}(\frac{wl}{6} - R_A) \cdots ⑩$$

よって、たわみの式は、

$$v = -\frac{1}{EI}\left\{\frac{R_A}{6}x^3 - \frac{w}{24}x^4 + \frac{l^2 x}{8}(\frac{wl}{6} - R_A)\right\} \cdots ⑪$$

C 点のたわみ v_C は，⑪式に x=l/2 を代入して、

$$v_C = -\frac{1}{8EI}(-\frac{l^3}{3}R_A + \frac{wl^4}{16}) \cdots ⑫$$

となる。

次に、⑫式に④式を代入して整理すると、

$$v_C = -\frac{5wl^4}{8(48EI + kl^3)} \cdots ⑬$$

となる。

したがって、

$$R_C = kv_C = \frac{5wl^4}{8(48EI + kl^3)}k \cdots ⑭$$

また、②式に⑭式を代入して整理すると、

$$R_A = R_B = \frac{3wl}{16}(\frac{128EI + kl^3}{48EI + kl^3}) \cdots ⑮$$

8 - B2

力のつり合いより

$$R_A + R_B - \frac{w_1 l}{2} = 0 \cdots ①$$

A 点まわりのモーメントのつりあい

$$-M_A - \frac{w_1 l^2}{3} + R_B l + M_B = 0 \cdots ②$$

曲げモーメント M は、

$$M = M_A + R_A x - \frac{w_1 x^3}{6l} \cdots ③$$

したがって、たわみの微分方程式は、

$$\frac{d^2 v}{dx^2} = -\frac{M}{EI} = -\frac{1}{EI}(M_A + R_A x - \frac{w_1 x^3}{6l}) \cdots ④$$

この式を順次積分すると、

$$\frac{dv}{dx} = i = -\frac{1}{EI}(M_A x + \frac{R_A x^2}{2} - \frac{w_1 x^4}{24l} + C_1) \cdots ⑤$$

$$v = -\frac{1}{EI}(\frac{M_A x^2}{2} + \frac{R_A x^3}{6} - \frac{w_1 x^5}{120l} + C_1 x + C_2) \cdots ⑥$$

境界条件

A 点（x=0）で、たわみ角 i=0、たわみ v=0 を⑤式、⑥式に代入すると、

$C_1=0$、$C_2=0$

となる。したがって、

$$\frac{dv}{dx} = i = -\frac{1}{EI}(M_A x + \frac{R_A x^2}{2} - \frac{w_1 x^4}{24l}) \cdots ⑦$$

$$v = -\frac{1}{EI}(\frac{M_A x^2}{2} + \frac{R_A x^3}{6} - \frac{w_1 x^5}{120l}) \cdots ⑧$$

B 点（x=l）で、たわみ角 i=0 なので、

$$M_A = \frac{w_1 l^2}{24} - \frac{R_A l}{2} \cdots ⑨$$

B 点（x=l）で、たわみ v=0 と⑨式を⑧式に代入して、

$$R_A = \frac{3w_1 l}{20} \cdots ⑩$$

⑩式を①式に代入すると、

$$R_B = \frac{7w_1 l}{20} \cdots ⑪$$

⑨式に⑩式を代入すると、

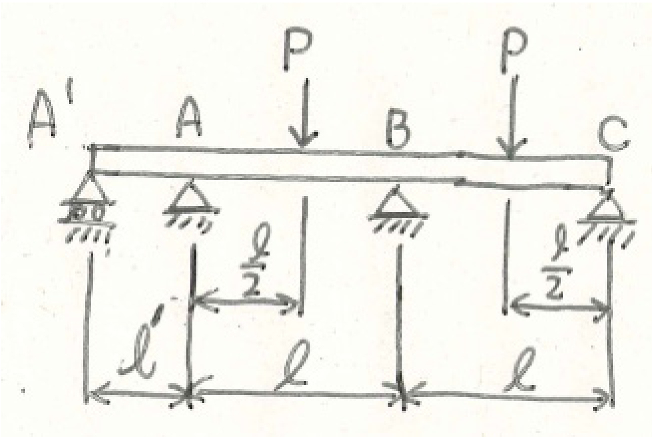
$$M_A = -\frac{w_1 l^2}{30} \cdots ⑫$$

②式、⑪式、⑫式より

$$M_B = -\frac{w_1 l^2}{20} \cdots ⑬$$

8‐B3

p.99、図 8-5（b）と同様に、A 点（固定端）を図のように、2 つの支持点（A´点、A 点）に置き換える。



・A´AB 部に 3 モーメントの式を適用すると、

$$M_{A'}l'+2M_B(l'+l)+M_Bl=6EI(0-\frac{Pl^2}{16EI})\cdots①$$

・ABC 部に 3 モーメントの式を適用すると、

$$M_{A'}l+2M_B(l+l)+M_Bl=6EI(-\frac{Pl^2}{16EI}-\frac{Pl^2}{16EI})\cdots②$$

ここで、$M_{A'}=0$、$M_C=0$、$l'=0$ なので、

$$2M_A+M_B=-\frac{3Pl}{8}\cdots③$$

$$M_A+4M_B=-\frac{3Pl}{4}\cdots④$$

③式、④式を連立して、

$$M_A=-\frac{3Pl}{28}\cdots⑤$$

$$M_B=-\frac{9Pl}{56}\cdots⑥$$

一方、

$$R_B = \frac{P}{2} + \frac{M_A - M_B}{l} + \frac{M_C - M_B}{l} + \frac{P}{2} = \frac{17P}{14} \cdots ⑦$$

また、

$$R_A = \frac{M_B - M_A}{l} + \frac{P}{2} = \frac{25P}{56} \cdots ⑧$$

力のつり合いから、

$$R_A + R_B + R_C - P - P = 0 \cdots ⑨$$

である。

⑦式、⑧式を⑨式に代入して整理すると、

$$R_C = \frac{19P}{56} \cdots ⑩$$

となる。