2章　問題解答

２－１

予習

１．

(1)密度［ML^{-3}］　(2)単位体積重量［$ML^{-2}T^{-2}$］　(3)圧力[$ML^{-2}T^{-1}$]

２．

$$F = \sqrt{F_x^2 + F_y^2} = \sqrt{4.3^2 + 2.5^2} = 5.0\mathrm{N}$$

$$\theta = \tan^{-1}\frac{F_y}{F_x} = \tan^{-1}\frac{2.5}{4.3} = 30.2°$$

演習問題　Ａ

2-1-A1　　1013hPa

2-1-A2

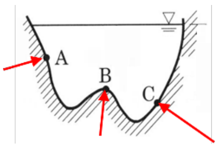
$$p = \rho gh + p_0 = 1000 \times 9.8 \times 10 + 101.3 \times 10^3 = 199300\ \mathrm{N} = 199.3\ \mathrm{kN}$$

2-1-A3

$$\frac{P_1}{A_1} = \frac{P_2}{A_2} \quad \text{より} \quad P_1 = P_2 \times \frac{A_1}{A_2} = 2 \times \frac{10}{30} = 0.7\ \mathrm{kN}$$

2-1-A4

図のように面に直角に作用する（３つの力の大きさ（矢印の長さ）も水深に応じて変化させること)。



演習問題　Ｂ

2-1-B1

油の単位重量　　$\gamma' = 0.92\gamma = 0.92 \times 9.8 = 9.016\ \mathrm{kN/m^3}$

水の単位重量　　$\gamma = \rho g = 9.8\ \mathrm{kN/m^3}$

海水の単位重量　$\gamma'' = 1.025\gamma = 1.025 \times 9.8 = 10.05\ \mathrm{kN/m^3}$

①油と水との境界面

$$p' = \gamma' h_1 = 9.016 \times 2.2 = 19.8\ \mathrm{kPa}$$

②水と海水との境界面

$$p = p' + \gamma' h_2 = 19.8 + 9.8 \times 1.9 = 38.5\ \mathrm{kPa}$$

③水槽の底面

$$p'' = p + \gamma'' h_3 = 38.5 + 10.05 \times 3.7 = 75.6\ \mathrm{kPa}$$

2-1-B2

全水圧　$P=\rho gHA=9.8\times1.5\times\dfrac{\pi\times1.2^2}{4}=16.6\ \mathrm{kN}$

左側の池から右側の池に向かって作用する。

作用点　H_c=1.5+0.6+0.6= 2.7 m

2-1-B3

(1) 全水圧は　$P=\rho gH_GA=9.8\times3\times6=176.4\ \mathrm{kN}$

となる。したがって，３つの部材には

$$176.4\div3=58.8\ \mathrm{kN}$$

ずつ受け持たせればよい。

$$\frac{1}{2}\rho gh_1^2=58.8\ \mathrm{kN}$$

より

$$h_1=3.46\ \mathrm{m}$$

となる。また，

$$\frac{1}{2}\rho gh_2^2=58.8\times2\ \mathrm{kN}$$

より

$$h_2=4.90\ \mathrm{m}$$

(2) $d_1=6-\dfrac{2}{3}h_1=6-\dfrac{2}{3}\times3.46=3.69\ \mathrm{m}$

$$58.8\times(6-d_2)=(58.8\times2)\times\frac{2}{3}h_2-58.8\times\frac{2}{3}h_1$$

したがって

$$d_2=6-\frac{(58.8\times2)\times\frac{2}{3}\times4.90-58.8\times\frac{2}{3}\times3.46}{58.8}$$

$$=1.77\ \mathrm{m}$$

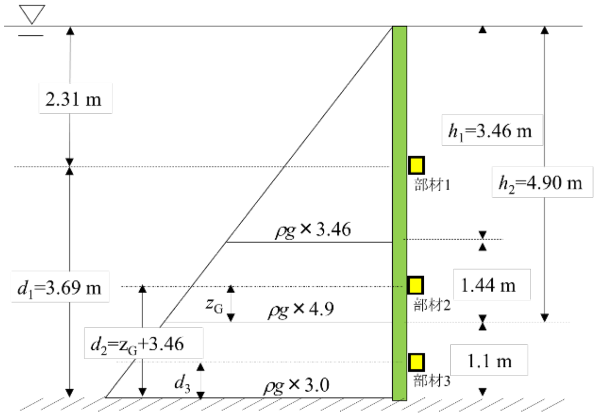
$$58.8\times(6-d_3)=(58.8\times3)\times\frac{2}{3}\times6-(58.8\times2)\times\frac{2}{3}h_2$$

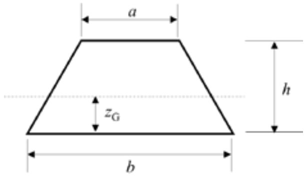
したがって

$$d_3=6-\frac{(58.8\times3)\times\frac{2}{3}\times6-(58.8\times2)\times\frac{2}{3}\times4.90}{58.8}$$

$$=0.53\ \mathrm{m}$$

【別解】d_3 と d_2 については，台形の図心より求めることもできる（下図参照）。





$$\boxed{z_G = \frac{h}{3}\frac{(a+2b)}{(a+b)}}$$

$$d_3 = \frac{h}{3}\frac{(a+2b)}{(a+b)} = \frac{1.1}{3}\frac{(6.0\rho g + 2\times 4.9\rho g)}{(6.0\rho g + 4.9\rho g)}$$
$$= 0.53 \text{ m}$$

$$d_2 = 1.1 + z_G = 1.1 + \frac{h}{3}\frac{(a+2b)}{(a+b)}$$
$$= \frac{1.1}{3}\frac{(4.9\rho g + 2\times 3.46\rho g)}{(4.9\rho g + 3.46\rho g)}$$
$$= 1.1 + 0.68 = 1.78 \text{ m}$$

2-1-B4

(1)作用点

$$s_c = s_G + \frac{I_G}{s_G A}$$

$$= \frac{0.9}{\sin 60°} + \frac{\dfrac{1\times\left(\dfrac{1.8}{\sin 60°}\right)^3}{12}}{\left(\dfrac{0.9}{\sin 60°}\right)\left(\left(\dfrac{1.8}{\sin 60°}\right)\times 1\right)} = 1.39 \text{ m}$$

$$d = \frac{1.8}{\sin 60°} - s_c = 2.08 - 1.39 = 0.69 \text{ m}$$

(2)全水圧

$$P = \rho g H_G A = 1000\times 9.8\times 0.9\times 2.078 = 18.330 \text{ N} = 18.33 \text{ kN}$$

２－２

予習

１.

(1)　浮力＝その物体の空中での重さと水中での重さの差＝1.2-0.8=0.4 N

(2)　水の単位体積重量 9800 N/m^3 より 0.4÷9800=4.1×10^{-5} m^3 =41cm^3

演習問題　A

2-2-A1

水面下にある氷山の容積を V_1 [m^3]とする。重力と浮力のつり合いから

$$\rho_i g(V_i + 120) = \rho_s g V_i$$

$$V_i = \frac{\rho_i \times 120}{\rho_s - \rho_i} = \frac{920 \times 120}{1025 - 920} = 1051 \text{ m}^3$$

2-2-A2

物体の体積を V [m^3]とする。アルキメデスの原理より，物体が排除した水の重量分の浮力 B を受けるので，次式が成り立つ。

$$B = \rho_s g V$$

$$V = \frac{B}{\rho g} = \frac{250 - 160}{1000 \times 9.8} = 9.2 \times 10^{-3} \text{ m}^3$$

2-2-A3

水中重量 W' は，空気中での重量 W から鋼棒の受ける浮力Ｂを差し引いて得られる。

$$W' = W - B$$

$$= \rho' gV - \rho gV = (\rho' - \rho)gV = (7850 - 1000) \times 9.8 \times \left(\frac{\pi \times 0.02^2}{4}\right) = 21.1 \text{ N}$$

2-2-A4

きっ水を x として，空気中での木材の重量と，水没した木材が押しのけた水の重量のつり合いの関係から，

$$650 \times \frac{\pi \times 0.8^2}{4} \times 1 = 1000 \times \frac{\pi \times 0.8^2}{4} \times x$$

$$x = \frac{650}{1000} = 0.65 \text{ m}$$

2-2-A5

円柱の底から重心までの距離

$$\overline{BG} = \frac{1}{2} = 0.5 \text{ m}$$

円柱の底から浮心までの距離

$$\overline{BC} = \frac{x}{2} = \frac{0.65}{2} = 0.325 \text{ m}$$

浮心から重心までの距離

$$\overline{CG} = \overline{BG} - \overline{BC} = 0.5 - 0.325 = 0.175 \text{ m}$$

断面二次モーメント

$$I_y = \frac{\pi d^4}{64} = \frac{\pi \times 0.8^4}{64} = 0.0201 \text{ m}^4$$

水没した木材の体積

$$V = \frac{\pi d^2}{4} \times x = \frac{\pi \times 0.8^2}{4} \times 0.65 = 0.327 \text{ m}^3$$

傾心高

$$\overline{MG} = \frac{I_y}{V} - \overline{CG} = \frac{0.0201}{0.327} - 0.175 = -0.113 \text{ m}$$

演習問題　B

2-2-B1（解答例）

ケーソンの自重 W は全体がコンクリートで満たされたと仮定した場合の重量 W_1 から内部空間に見合うコンクリートの重量 W_2 を引いて求められる。

$$W = W_1 - W_2 = 2.4\rho g\{(7.5\times 4\times 5) - 2\times(3.3\times 3.4\times 4.5)\}$$
$$= 1153.0\ \mathrm{kN}$$

底面から重心までの距離 $\overline{BG}$ は底面まわりのモーメントより求められる。

$$W\times\overline{BG} = W_1\times\overline{BG_1} - W_2\times\overline{BG_2}$$

$$\overline{BG} = \frac{W_1\times\overline{BG_1} - W_2\times\overline{BG_2}}{W} = \frac{2.4\rho g\times(7.5\times 4\times 5)\times\frac{5}{2} - 2.4\rho g\times 2\times(3.3\times 3.4\times 4.5)\times\left(0.5+\frac{5-0.5}{2}\right)}{1153.0\times 10^3}$$
$$= 1.98\ \mathrm{m}$$

きっ水 x は浮力 B と重力 W のつり合いより求められる。浮力は

$$B = 1.025\rho g(7.5\times 4.0\times x) = 301.4x\ \mathrm{kN}$$

となる。$B = W$ より

$$301.4x = 1153.0$$
$$x = 3.83\ \mathrm{m}$$

となる。よって，ケーソン底から浮心までの距離は

$$\overline{BC} = \frac{x}{2} = \frac{3.83}{2} = 1.92\ \mathrm{m}$$

となる。

断面二次モーメントは，より小さくなる長軸まわりで考える。

$$I_y = \frac{bh^3}{12} = \frac{7.5\times 4.0^3}{12} = 40\ \mathrm{m}^4$$

水没したケーソンの体積は

$$V = 7.5\times 4\times 3.83 = 114.9\ \mathrm{m}^3$$

となる。浮心から重心までの距離は

$$\overline{CG} = \overline{BG} - \overline{BC} = 1.98 - 1.92 = 0.06\ \mathrm{m}$$

となり，傾心高は

$$\overline{MG} = \frac{I_y}{V} - \overline{CG} = \frac{40}{114.9} - 0.06 = 0.288\ \mathrm{m}$$

となる。$\overline{MG} > 0$　なので，このケーソンは安定である。

2-2-B2

各部分の体積は，

$$V_0 = \frac{\pi D^2}{4}(H_1 + H_2) = \frac{\pi D^2}{4}\times(4+1) = 1.25\pi D^2 \quad , \quad V_1 = \frac{\pi D^2}{4}H_1 = \frac{\pi D^2}{4}\times 4 = \pi D^2 \quad ,$$

$$V_2 = \frac{\pi D^2}{4} H_2 = \frac{\pi D^2}{4} \times 1 = 0.25\pi D^2$$

きっ水を x とすると，物体に作用する重力 W と浮力 B のつり合いより，

$$W = 0.8\rho g V_1 + 1.3\rho g V_2 = \rho g\left(0.8 \times \pi D^2 + 1.3 \times 0.25 \times \pi D^2\right) = 1.125\rho g \pi D^2$$

$$B = \rho g\left(\frac{\pi D^2}{4} x\right) = 0.25\rho g \pi D^2 x$$

となる。$B = W$ より，$0.25\rho g \pi D^2 x = 1.125\rho g \pi D^2$

したがって，

$$x = \frac{1.125\rho g \pi D^2}{0.25\rho g \pi D^2} = 4.5 \text{ m}$$

となり，円筒の底から浮心までの距離は

$$\overline{BC} = \frac{x}{2} = \frac{4.5}{2} = 2.25 \text{ m}$$

となる。

重心の位置は，円筒底の中心点Bまわりのモーメントのつり合いから考える。各部分に作用する重力 W_1, W_2 は，

$$W_1 = 0.8\rho g V_1 = 0.8\rho g \pi D^2,\ W_2 = 1.3\rho g V_2 = 0.325\rho g \pi D^2$$

であり，円筒底の中心点Bからの距離 L_1，L_2 はそれぞれ 3.0m，0.5m である。

$$W \times \overline{BG} = W_1 \times L_1 + W_2 \times L_2$$

$$\overline{BG} = \frac{W_1 \times L_1 + W_2 \times L_2}{W} = \frac{0.8\rho g \pi D^2 \times 3 + 0.325\rho g \pi D^2 \times 0.5}{1.125\rho g \pi D^2} = 2.28 \text{ m}$$

浮心から重心までの距離は

$$\overline{CG} = \overline{BG} - \overline{BC} = 2.28 - 2.25 = 0.03 \text{ m}$$

となる。傾心高は

$$\overline{MG} = \frac{I_y}{V} - \overline{CG} = \frac{\dfrac{\pi D^4}{64}}{\dfrac{\pi D^2}{4} \times 4.52} - 0.02 = 0.0138D^2 - 0.02 \text{ m}$$

となる。浮体は $\overline{MG} > 0$ のとき，安定する。したがって，$0.0138D^2 - 0.02 > 0$ を満たす直径 D の場合に安定する。この条件を求めると，

$$D > \sqrt{\frac{0.02}{0.0138}} = 1.20 \text{ m}$$

となり，直径 D が 1.2m 以上で安定する。

2-2-B3

円錐体の高さをH, きっ水をxとすると, 円錐体に作用する重力W, 浮力Bは

$$W = 0.6\rho g V = 0.6\rho g\left(\frac{1}{3}\pi r^2 H\right) = 0.2\rho g \pi r^2 H$$

$$B = \rho g V' = \rho g\left(\frac{1}{3}\pi r'^2 x\right)$$

と表せる。$W = B$より,

$$\rho g\left(\frac{1}{3}\pi r'^2 x\right) = 0.2\rho g \pi r^2 H$$

$$x = 0.6\left(\frac{r}{r'}\right)^2 H = 0.6\left(\frac{H\tan\theta}{x\tan\theta}\right)^2 H$$

したがって，$x = 0.6^{\frac{1}{3}} H$ ・・・・(※)

円錐体の頂点から重心までの距離は，$\overline{BG} = \frac{3}{4}H$，同じく浮心までの距離は，$\overline{BC} = \frac{3}{4}x$である。よって, 浮心から重心までの距離は

$$\overline{CG} = \overline{BG} - \overline{BC} = \frac{3}{4}(H - x)$$

となり，傾心高は

$$\overline{MG} = \frac{I_y}{V} - \overline{CG} = \frac{\frac{\pi r'^4}{4}}{\frac{1}{3}\pi r'^2 x} - \frac{3}{4}(H - x) = \frac{\frac{1}{4}\pi x^4 \tan^4\theta}{\frac{1}{3}\pi x^3 \tan^2\theta} - \frac{3}{4}(H - x)$$

$$= \frac{3}{4}x\tan^2\theta - \frac{3}{4}(H - x)$$

$$= \frac{3}{4}\left(x\tan^2\theta - H + x\right)$$

となる。式(※)を代入してさらに整理すると,

$$\overline{MG} = \frac{3}{4}\left(x\tan^2\theta - H + x\right) = \frac{3}{4}\left(0.6^{\frac{1}{3}} H\tan^2\theta - H + 0.6^{\frac{1}{3}} H\right)$$

$$= \frac{3}{4}\left(0.6^{\frac{1}{3}}\left(\tan^2\theta + 1\right) - 1\right)H$$

$\overline{MG} > 0$を満たすθの場合に安定し，$\overline{MG} = 0$で中立，$\overline{MG} < 0$で不安定となる。求めるθは,

$\overline{MG} = 0$から式を変形して，$\theta = \tan^{-1}\left(\sqrt{\frac{1}{0.6^{\frac{1}{3}}} - 1}\right) = 23.3^\circ$となる。

２－３

予習

１．

物体は列車の進行方向とは反対向きに，Ma の慣性力を受ける。

２．

周期$T = \dfrac{t}{n} = \dfrac{10}{4} = 2.5$ s，角速度 $\omega = \dfrac{2\pi}{T} = \dfrac{2\pi}{2.5} = 2.5$ rad/s

演習問題　Ａ

2-3-A1

トラックの加速度を

$$a = \frac{dv}{dt} = \frac{60-0}{5} = 12 \text{ m/s}^2$$

水平面と水面のなす角度をθとすると

$$\tan\theta = \frac{a}{g}$$

より，

$$\theta = \tan^{-1}\frac{a}{g} = \tan^{-1}\frac{12}{9.8} = 50.7°$$

2-3-A2

角速度は

$$\omega = \frac{2\pi n}{60} = \frac{2\pi \times 50}{60} = 5.24 \text{ rad/s}$$

式 2-45 を変形して

$$h_a - h_0 = \frac{\omega^2 a^2}{2g}$$

$$= \frac{5.24^2 \times 0.1^2}{2 \times 9.8} = 0.01 \text{ m}$$

演習問題　Ｂ

2-3-B1

静止状態の水槽中心での水面を原点として，水平方向に x 軸，鉛直方向に z 軸をとる（問題文横の図参照）。式 2-35 において，

$$X = -a\cos\theta$$

$$Y = 0$$

$$Z = -g - a\sin\theta$$

として解き，境界条件を与えると

$$z = \frac{a\cos\theta}{g + a\sin\theta}x$$

となる。水平面と水面のなす角度をβとすると，

$$\beta = \tan^{-1}\frac{a\cos\theta}{g + a\sin\theta}$$

2-3-B2

式 2-35 において,

$$X = g\sin\theta\cos\theta$$

$$Y = 0$$

$$Z = -g + g\sin\theta\sin\theta$$

として, x=0 で y=0 のもとで積分すると

$$z = \frac{g\sin\theta\cos\theta}{-g + g\sin\theta\sin\theta}x = \frac{\sin\theta\cos\theta}{1-\sin\theta\sin\theta}x$$

となる。水平面と水面のなす角度をβとすると

$$\tan\beta = \frac{\sin\theta\cos\theta}{1-\sin\theta\sin\theta}$$

よって,

$$\beta = \tan^{-1}\frac{\sin\theta\cos\theta}{1-\sin\theta\sin\theta}$$

2-3-B3

容器の中心を原点として, 水平方向に x 軸, 鉛直上向きに z 軸をとる。式 2-35 において,

$$X = -0.6\varpi^2$$

$$Y = 0$$

$$Z = -g$$

として解き，境界条件を与えると

$$z = \frac{0.6\varpi^2}{g}x$$

となる。水平面と水面のなす角度をβとすると

$$\tan\beta = \frac{0.6\varpi^2}{g}$$

となる。この角度βが x 軸に対する容器の傾き（60°）と平行になれば水はなくなる。

$$\tan\beta = \tan 60° = \frac{0.5\varpi^2}{g}$$

より

$$\varpi = 5.31\ \mathrm{rad/s}$$

したがって回転数 n は, $\omega = \dfrac{2\pi n}{60}$ より,

$$n = \frac{60\omega}{2\pi} = \frac{60\times 5.31}{2\pi} = 50.7\ \mathrm{rpm}$$