3章　問題解答

３－１

予習

１．物体が移動した速度 U は，物体が単位時間当たりに進む距離を計算すればよいので，以下のように計算できる。

$$\text{流速}U=\frac{\text{距離}x}{\text{時間}t}=\frac{150.0}{10.0}=15.0\,\text{m/s}$$

演習問題　Ａ

3-1-A1

■管路

流水断面積 A　$A=B\cdot h=2.0\times2.0=4.00\text{m}^2$

潤辺 S　$S=2\cdot B+2\cdot h=2\times2.0+2\times2.0=8.00\text{m}$

径深 R　$R=\dfrac{A}{S}=\dfrac{4.000}{8.000}=0.500\text{m}$

流量 Q　$Q=A\cdot U=4.000\times2.000=8.00\text{m}^3/\text{s}$

■開水路

流水断面積 A　$A=B\times h=2.0\times1.0=2.00\text{m}^2$

潤辺 S　$S=B+2h=2.0+2\times1.0=4.00\text{m}$

径深 R　$R=\dfrac{A}{S}=\dfrac{2.0}{4.0}=0.500\text{m}$

流量 Q　$Q=A\cdot U=2.000\times2.0=4.00\text{m}^3/\text{s}$

3-1-A2

■管路

流水断面積 A　$A=\dfrac{\pi D^2}{4}\times\dfrac{1}{2}=\dfrac{\pi\times2.0^2}{4}=3.14\text{m}^2$

潤辺 S　$S=\pi D=\pi\times2.0=6.28\text{m}$

径深 R　$R=\dfrac{A}{S}=\dfrac{3.142}{6.283}=0.500\text{m}$

流量 Q　$Q=A\cdot U=3.142\times2.0=6.28\text{m}^3/\text{s}$

■開水路

流水断面積 A　$A=\dfrac{\pi D^2}{4}\times\dfrac{1}{2}=\dfrac{\pi\times2.0^2}{4}\times\dfrac{1}{2}=1.57\text{m}^2$

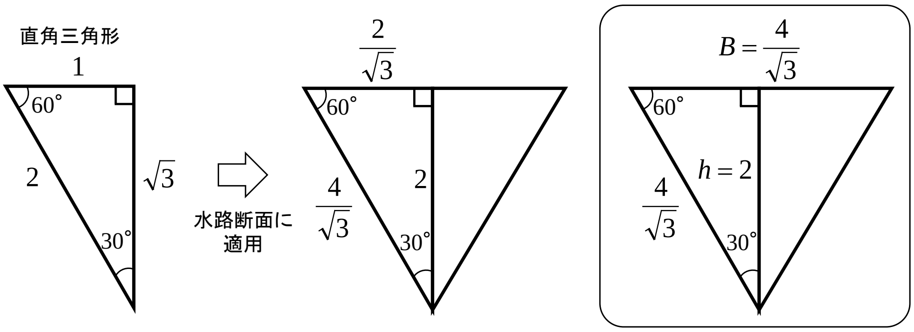
潤辺 S　$S=\pi D\times\dfrac{1}{2}=\pi\times2.000\times\dfrac{1}{2}=3.14\text{m}$

径深 R $\quad R=\dfrac{A}{S}=\dfrac{1.571}{3.142}=0.500\text{m}$

流量 Q $\quad Q=A\cdot U=1.571\times 2.0=3.14\text{m}^3/\text{s}$

3-1-A3

■管路



流水断面積 A $\quad A=(B\times h)\times\dfrac{1}{2}=(\dfrac{4}{\sqrt{3}}\times 2.0)\times\dfrac{1}{2}=2.31\text{m}^2$

潤辺 S $\quad S=\dfrac{4}{\sqrt{3}}\times 2+\dfrac{4}{\sqrt{3}}=6.93\text{m}$

径深 R $\quad R=\dfrac{A}{S}=\dfrac{2.3094}{6.9282}=0.333\text{m}$

流量 Q $\quad Q=A\cdot U=2.309\times 2.0=4.62\text{m}^3/\text{s}$

■開水路

流水断面積 A $\quad A=(B\times h)\times\dfrac{1}{2}=(\dfrac{2}{\sqrt{3}}\times 1.0)\times\dfrac{1}{2}=0.577\text{m}^2$

潤辺 S $\quad S=\dfrac{2}{\sqrt{3}}\times 2.0=2.31\text{m}$

径深 R $\quad R=\dfrac{A}{S}=\dfrac{0.5774}{2.309}=0.250\text{m}$

流量 Q $\quad Q=A\cdot U=0.577\times 2.0=1.15\text{m}^3/\text{s}$

3-1-A4

■四角形断面水路

流水断面積 A $\quad A=h\times h/2=0.500h^2$

流量 Q $\quad Q=A\cdot U=0.500h^2\times 1.0=0.500h^2$

潤辺 S $\quad S=\dfrac{h}{2}\times 2+h=2.00h$

径深 R $\quad R=\dfrac{A}{S}=\dfrac{h^2/2}{2.000h}=0.250h$

■円形断面水路

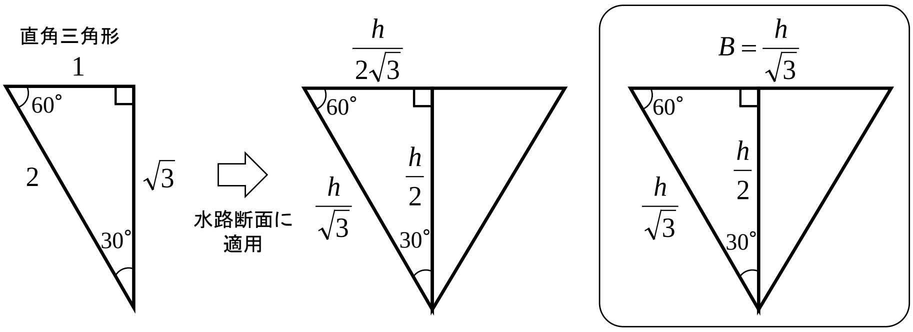
流水断面積 A　　$A=\dfrac{\pi h^2}{4}\times\dfrac{1}{2}=\dfrac{\pi h^2}{8}=0.393h^2$

流量 Q　　$Q=A\cdot U=0.3927h^2\times 1.0=0.393h^2$

潤辺 S　　$S=\pi\cdot h\times\dfrac{1}{2}=\dfrac{\pi}{2}h=1.57h$

径深 R　　$R=\dfrac{A}{S}=\dfrac{0.3927h^2}{1.571h}=0.250h$

■三角形



流水断面積 A　　$A=(\dfrac{h}{\sqrt{3}}\times\dfrac{h}{2})\times\dfrac{1}{2}=0.144h^2$

流量 Q　　$Q=A\cdot U=0.1443h^2\times 1.0=0.144h^2$

潤辺 S　　$S=\dfrac{h}{\sqrt{3}}\times 2=1.16h$

径深 R　　$R=\dfrac{A}{S}=\dfrac{0.1443h^2}{1.155h}=0.125h$

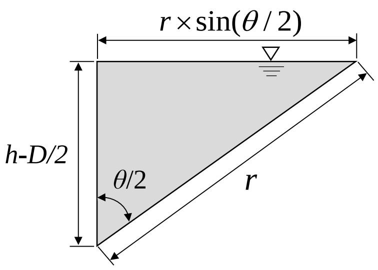
流量 Q の大きい順：　四角形($0.500h^2$)　＞　円形($0.393h^2$)　＞　三角形($0.144h^2$)

径深 R の大きい順：　四角形($0.250h$)　＝　円形($0.250h$)　＞　三角形($0.125h$)

演習問題　B

3-1-B1

■中心角 θ および水面幅 B の計算



$$\cos(\theta/2)=\frac{h-D/2}{D/2}=\frac{0.40}{0.80}=0.500$$

$$\left(r=\frac{D}{2}=0.800\text{m}\right)$$

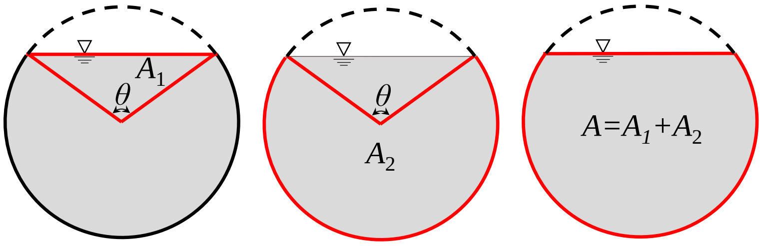
$$\theta/2=60^\circ \quad \rightarrow \quad \theta=120^\circ$$

水面幅 B の計算

$$B=2\cdot r\cdot\sin(\theta/2)=2\times 0.80\times\sin 60^\circ=1.386\text{m}$$

■流水断面積 A の計算

三角形部分の流水断面積 A_1，扇形部分の流水断面積 A_2 を計算することで，流水断面積 A を求める。



$$A_1 = \frac{B \times (h - D/2)}{2} = \frac{1.386 \times 0.40}{2} = 0.2772\mathrm{m}^2$$

$$A_2 = \frac{\pi \times D^2}{4} \times \frac{(360° - \theta)}{360°} = \frac{\pi \times 1.60^2}{4} \times \frac{(360° - 120°)}{360°} = 1.340\mathrm{m}^2$$

$$A = A_1 + A_2 = 0.2772 + 1.340 = 1.617\mathrm{m}^2$$

■流量 Q の計算

$$Q = A \cdot U = 1.617 \times 1.0 = 1.62\mathrm{m}^3/\mathrm{s}$$

3-1-B2

■管路

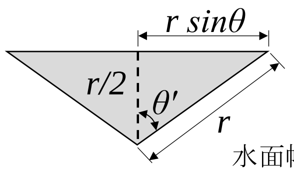
流水断面積 A　$A = \dfrac{\pi (2r)^2}{4} = \dfrac{\pi \times 4 \times r^2}{4} = \pi r^2 = 3.14 r^2$

潤辺 S　$S = \pi \times 2r = 2\pi r = 6.28r$

径深 R　$R = \dfrac{A}{S} = \dfrac{\pi r^2}{2\pi r} = \dfrac{r}{2} = 0.500r$

■開水路

・中心角 θ および水面幅の計算

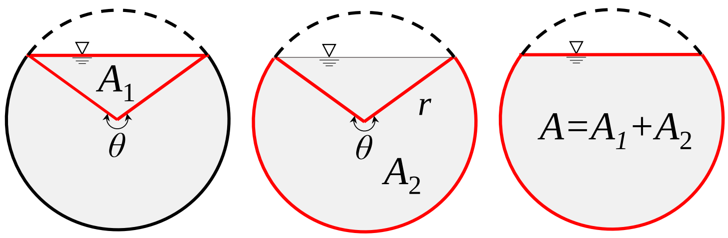


$$\cos\theta' = \frac{(r/2)}{r} = 0.5000$$

$$\theta' = 60° \qquad \theta = 360° - 2\theta' = 360° - 120° = 240°$$

水面幅 B：　$B = 2 \cdot r \cdot \sin\theta$

・流水断面積 A の計算



(三角形部分の面積 A_1)

$$A_1 = \frac{r}{2} \times 2.0 \times r \cdot \sin 60^\circ \times \frac{1}{2} = \frac{r}{2} \times r \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{4} r^2 = 0.433r^2$$

(扇形部分の面積 A_2)

$$A_2 = \frac{\pi(2r)^2}{4} \times \frac{\theta}{360^\circ} = \pi r^2 \times \frac{2}{3} = \frac{2}{3}\pi r^2 = 2.094r^2$$

$$A = 0.4330r^2 + 2.094r^2 = 2.527r^2 \fallingdotseq 2.53r^2$$

・潤辺 S の計算

$$S = 2\pi r\left(\frac{\theta}{360^\circ}\right) = 2\pi r\left(\frac{240^\circ}{360^\circ}\right) = \frac{4}{3}\pi r = 4.189r \fallingdotseq 4.19r$$

・径深 R の計算

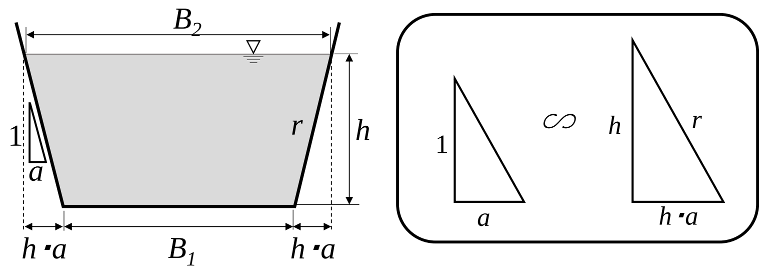
$$R = \frac{A}{S} = \frac{2.527r^2}{4.189r} = 0.603r$$

3-1-B3

(1) 流水断面積 A，潤辺 S，径深 R

■水面幅 B_2 および水路側面長さ r 計算

図のような三角形の相似関係から，水面幅 B_2 の計算を行う。



水面幅 B_2： $B_2 = B_1 + 2h \cdot a$

水路側面 r： $r = \sqrt{h^2 + (h \cdot a)^2} = h\sqrt{1 + a^2}$

■流水断面積 A

$$A = \frac{B_1 + B_2}{2} h = \frac{B_1 + (B_1 + 2h \cdot a)}{2} h = h(B_1 + h \cdot a)$$

■潤辺 S

$$S = B_1 + 2r = B_1 + 2h\sqrt{1 + a^2}$$

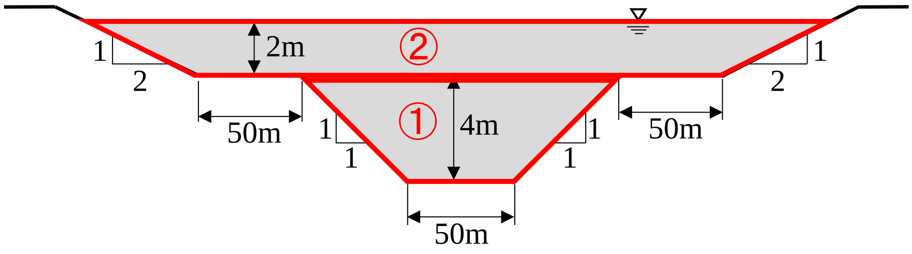
■径深 R

$$R = \frac{A}{S} = \frac{h(B_1 + h \cdot a)}{B_1 + 2h\sqrt{1 + a^2}} = \frac{h(B_1 + h \cdot a)}{B_1 + 2h\sqrt{1 + a^2}}$$

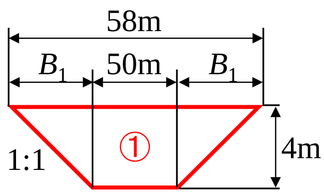
3-1-B4

■流水断面積 A

二つの台形に分けて計算を行う。



■台形①の流水断面積 A_1，潤辺 S_1，径深 R_1，流量 Q_1 の計算



1) 流水断面積 A_1 の計算

長さ B_1 は傾斜部が 1:1 であるため，高さ 4m の場合で B_1=4m となる。

$$A_1 = \frac{(B_1 + B_1 + 50.0) + 50.0}{2} \times 4.0$$

$$= \frac{(4.0 + 4.0 + 50.0) + 50.0}{2} \times 4.0$$

$$= 216.0\text{m}^2$$

2) 潤辺 S_1

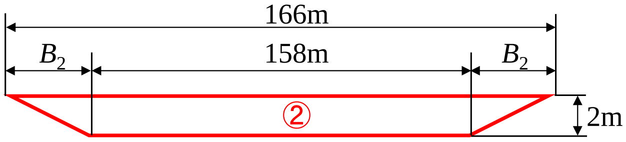
傾斜部の長さの計算 $\sqrt{B_1{}^2 + 4^2} = \sqrt{4^2 + 4^2} = 5.657\text{m}^2$

$$S_1 = 5.657 \times 2 + 50.0 = 61.314\text{ m}$$

3) 流量 Q_1

$$Q_1 = 216.0 \times 2.0 = 432.0\text{m}^3/\text{s}$$

■台形②の流水断面積 A_2，潤辺 S_2，径深 R_2，流量 Q_2 の計算



1) 流水断面積 A_2 の計算

長さ B_2 は傾斜部が 1:2 であるため，高さ 2m の場合で B_2=4m となる。底面の長さは，台形①の上面の長さに両端 50m ずつを加えればよいので，

(①の上面 58m)+(両端 50m×2)=158m となる。

$$A_2 = \frac{(B_2 + B_2 + 158.0) + 158.0}{2} \times 2.0$$

$$= \frac{(4.0 + 4.0 + 158.0) + 158.0}{2} \times 2.0$$

$$= 324.0\text{m}^2$$

2) 潤辺 S_2

傾斜部の長さの計算 $\sqrt{B_2{}^2 + 2^2} = \sqrt{4^2 + 2^2} = 4.472\text{m}^2$

$$S_2 = 4.472 \times 2 + 50.0 \times 2 = 108.9\text{m}$$

3) 流量 Q_2

$$Q_2 = 324.0 \times 2.0 = 648.0\text{m}^3/\text{s}$$

(2) 断面全体の径深 R, 潤辺 S、径深 R、流量 Q の計算

$$A = A_1 + A_2 = 216.0 + 324.0 = 540\,\text{m}^2$$

$$S = S_1 + S_2 = 61.31 + 108.9 = 170\,\text{m}$$

$$R = \frac{A}{S} = \frac{540.0}{170.2} = 3.17\,\text{m}$$

$$Q = Q_1 + Q_2 = 432.0 + 648.0 = 1080\,\text{m}^3/\text{s}$$

３－２

予習

１．水温 10 度の水の密度 ρ =999.70kg/m^3 であり，水の質量 m は水の密度と水の体積を掛け合わせることで計算できる。これより，質量 m は，以下のようになる。

$$m = \rho \cdot V = 999.70 \times 1.0 = 999.7\mathrm{kg}$$

２．現在と 10 時間後で質量は変化しないため，現在と 10 時間後の密度と体積は，以下のように示すことができる。

$$m = \quad \rho_1 \cdot V_1 \quad = \quad \rho \cdot V$$

・現在の物質の密度と体積　　：ρ_1，V_1

・10 時間後の物質の密度と体積：ρ，V

10 時間後の密度 ρ は次のように計算できる。

$$\rho = \frac{\rho_1 \cdot V_1}{V} = \frac{1000.0 \times 100.0}{110.0} = 909\ \mathrm{kg/m^3}$$

演習問題　Ａ

3-2-A1

連続式から円管 2 の直径 D_2 を求める式を導くことができる。

連続式より，$A_1 \cdot U_1 = A_2 \cdot U_2$

$$\frac{A_2}{A_1} = \frac{U_1}{U_2}$$

A_2/A_1 は以下のように整理できる。

$$\frac{A_2}{A_1} = \frac{\dfrac{\pi \cdot D_2^2}{4}}{\dfrac{\pi \cdot D_1^2}{4}} = \frac{D_2^2}{D_1^2}$$

したがって，円管 2 の直径 D$_2$ はこのように計算できる。

$$\frac{D_2^2}{D_1^2} = \frac{U_1}{U_2}$$

$$D_2 = \sqrt{\frac{U_1}{U_2}} \cdot D_1 = \sqrt{\frac{1.5}{1.0}} \times 1.0 = 1.23\mathrm{m}$$

3-2-A2

断面 1～3 に連続式を適用させることで，断面流速 U_2，U_3，流量 Q を計算することができる。

■断面積 A_1，A_2，A_3 の計算

・断面 1　断面積 A_1　　$A_1 = \dfrac{\pi D_1^2}{4} = \dfrac{\pi \times 0.50^2}{4} = 0.196\mathrm{m}^2$

・断面 2　断面積 A_2　　$A_2 = \dfrac{\pi D_2^2}{4} = \dfrac{\pi \times 0.30^2}{4} = 0.0707\mathrm{m}^2$

・断面 3　断面積 A_3　$A_3 = \dfrac{\pi D_3^2}{4} = \dfrac{\pi \times 0.10^2}{4} = 0.00785\mathrm{m}^2$

■断面平均流速 U_2，U_3 の計算

・断面 2　断面平均流速 U_2 の計算

$$U_2 = \frac{A_1}{A_2} U_1 = \frac{0.1963}{0.07068} \times 1.0 = 2.78\mathrm{m/s}$$

・断面 3　断面平均流速 U_3 の計算

$$U_3 = \frac{A_1}{A_3} U_1 = \frac{0.1963}{0.007854} \times 1.0 = 25.0\mathrm{m/s}$$

■断面 3 の流量 Q の計算

$$Q = A_3 \cdot U_3 = 0.007854 \times 24.99 = 0.196\mathrm{m^3/s}$$

3-2-A3

貯水槽の水位が一定であることから，流入する流量と流出する流量が等しくなる。そのため，連続式を用いて流入する流量から流出する断面平均流速 U を計算することができる。

■流入する流量 $Q_{流入}$ の計算

$$Q_{流入} = A_1 \cdot U_1 = \frac{\pi \times 0.10^2}{4} \times 2.0 = 0.01571\mathrm{m^3/s}$$

■流出部での断面平均流速 U の計算

$$Q_{流入} = Q_{流出}$$

$$Q_{流入} = Q_{流出} = A_2 \cdot U$$

$$U = \frac{Q_{流入}}{A_2} = \frac{0.01571}{(\pi \cdot 0.20^2)/4} = \frac{0.01571}{0.03142} = 0.500\mathrm{m/s}$$

3-2-A4

円管 3 は，円管 1 と 2 が合流した流量の水が流れているため，円管 1 と 2 に流れている水の流量を計算し，その値から円管 3 の断面平均流速 U_3 の計算を行う。

■円管 1 の流量 Q_1 の計算

$$Q_1 = \frac{\pi \times 0.20^2}{4} \times 1.0 = 0.03142\mathrm{m^3/s}$$

■円管 2 の流量 Q_2 の計算

$$Q_2 = \frac{\pi \times 0.30^2}{4} \times 1.0 = 0.07069\mathrm{m^3/s}$$

■円管 3 の流量 Q_3 の計算

$$Q_3 = Q_1 + Q_2 = 0.03142 + 0.07069 = 0.1021\mathrm{m^3/s}$$

■円管 3 の断面平均流速 U_3 の計算

$$U_3 = \frac{Q_3}{A_3} = \frac{0.1021}{(\pi \cdot 0.20^2)/4} = 3.25\mathrm{m/s}$$

演習問題　B

3-2-B1

■水門の上流側の流量 Q の計算

$$A_1 = B \cdot h = 2.0 \times 3.0 = 6.000\mathrm{m}^2$$

$$Q = A_1 \cdot U_1 = 6.0 \times 1.0 = 6.000\mathrm{m}^3/\mathrm{s}$$

■水門下部を通過する水の断面平均流速 U の計算

$$U = \frac{Q}{A} = \frac{6.000}{2.0 \times 1.0} = 3.00\mathrm{m}/\mathrm{s}$$

3-2-B2

連続式より，$Q = A_1 \cdot U = A_2 \cdot \frac{1}{3} U$

$$Q = \frac{\pi D^2}{4} U = \frac{\pi D_2^2}{4} \cdot \frac{1}{3} U$$

$$\frac{\pi D_2^2}{4} = \frac{3\pi D^2}{4}$$

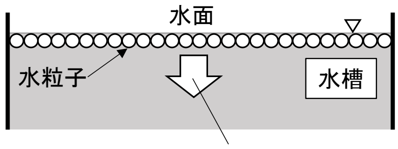
$$D_2^2 = 3D^2$$

$$D_2 = \sqrt{3} D = 1.73D$$

3-2-B3

水槽の下部に設置した円管から水が流出することで，水槽内の水の量が減少することから，水槽内で減少する単位時間当たりの水の量(流量)と下部の円管から流出する水の量(流量)は等しくなる。

そこで，水槽の水面の低下速度 $U_{水面}$が，水槽内の水の流速と等しくなると考えれば，連続式を用いて，円管から流出する水の断面平均流速 U を計算することができる。



水面の低下速度$U_{水面}$=水粒子の移動速度(流速)

・水槽の断面積 A_1　$A_1 = \frac{\pi D_1^2}{4}$

・円管の断面積 A_2　$A_2 = \frac{\pi D_2^2}{4}$

連続式より，断面平均流速 U は以下のようになる。

$$U = \frac{A_1}{A_2} U_{水面} = \frac{\pi D_1^2/4}{\pi D_2^2/4} U_{水面} = \left(\frac{D_1}{D_2}\right)^2 U_{水面}$$

3-2-B4

円管 1～4 に連続式を適用させることで，断面平均流速 U_1，U_3，U_4 の計算を行う。

■断面積 A の計算

・円管 1　断面積 A_1　$A_1 = \dfrac{\pi D_1^2}{4} = \dfrac{\pi \times 0.30^2}{4} = 0.07069\mathrm{m}^2$

・円管 2　断面積 A_2　$A_2 = \dfrac{\pi D_2^2}{4} = \dfrac{\pi \times 0.15^2}{4} = 0.01767\mathrm{m}^2$

・円管 4　断面積 A_4　$A_4 = \dfrac{\pi D_4^2}{4} = \dfrac{\pi \times 0.20^2}{4} = 0.03142\mathrm{m}^2$

■円管の流量 Q の計算

・円管 2 と 3　流量 Q_2，Q_3

$$Q_2 = Q_3 = A_2 \cdot U_2 = 0.01767 \times 1.0 = 0.01767\,\mathrm{m}^3/\mathrm{s}$$

・円管 1 と 4　流量 Q_1，Q_4

$$Q_1 = Q_4 = Q_2 + Q_3 = 0.01767 + 0.01767 = 0.03534\,\mathrm{m}^3/\mathrm{s}$$

■断面平均流速 U の計算

・円管 1　流速 U_1　$U_1 = \dfrac{Q_1}{A_1} = \dfrac{0.03534}{0.07067} = 0.500\mathrm{m/s}$

・円管 3　流速 U_3　$U_3 = U_2 = 1.00\mathrm{m/s}$

・円管 4　流速 U_4　$U_4 = \dfrac{Q_4}{A_4} = \dfrac{0.03534}{0.03143} = 1.12\mathrm{m/s}$

３－３

予習

１.

■点 A に物体があるときの物体が持つエネルギーE_A

物体が点 A にあるときは，物体の流速は U=0.0m/s であり，物体が蓄えている総エネルギーE_A は以下のようになる。

$$E_\mathrm{A} = mgz_\mathrm{A} + \frac{m \cdot 0.0^2}{2} = mgz_\mathrm{A}$$

■点 B に物体があるときの物体が持つエネルギーE_B

物体が点 B まで移動したときは，速度 U が増加し，運動エネルギーが増加する。そのため，物体が蓄えている総エネルギー量は，運動エネルギーと位置エネルギーの和となり，以下のようになる。

$$E_\mathrm{B} = mgz_\mathrm{B} + \frac{m \cdot U^2}{2}$$

２. 点 A と B で物体が持つ総エネルギーE_A と E_B は一定(同じ)であることから，次のように計算できる。

エネルギー保存の法則より，$E_A = E_B$

$$mgz_A = mgz_B + \frac{mU_B^2}{2}$$

$$U_B = \sqrt{2g(z_A - z_B)}$$

$$= \sqrt{2 \times 9.8 \times (2.0 - 0.50)} = 5.42\ \mathrm{m/s}$$

３． 物体が持つエネルギーの式の両辺を mg で割ることで，各項で長さの単位を持つ式となる。

$$E \times \frac{1}{mg} = (mgz + \frac{1}{2}mU^2) \times \frac{1}{mg}$$

$$\frac{E}{mg} = z + \frac{U^2}{2g}$$

水理学では，エネルギーを水頭と呼ばれる水柱の高さ(長さの単位)で表すことが一般的である。

演習問題　Ａ

3-3-A1

■断面平均流速 U_2 の計算

連続式より，断面 2 における断面平均流速 U_2 を計算する。

$$Q = A_1 \cdot U_1 = \frac{\pi \cdot 0.20^2}{4} \times 2.0 = 0.06283\mathrm{m^3/s}$$

$$U_2 = \frac{Q}{A_2} = \frac{0.06283}{(\pi \cdot 0.10^2/4)} = 8.00\mathrm{m/s}$$

■位置水頭，圧力水頭，速度水頭の計算

①位置水頭　$z_2 = 2.00\mathrm{m}$

②圧力水頭　断面 1 と 2 のベルヌーイの式より，以下のようになる。

$$z_1 + \frac{p_1}{\rho g} + \frac{U_1^2}{2g} = z_2 + \frac{p_2}{\rho g} + \frac{U_2^2}{2g}$$

$$\frac{p_2}{\rho g} = \frac{p_1}{\rho g} + (z_1 - z_2) + \frac{U_1^2 - U_2^2}{2g}$$

$$= \frac{50000}{1000 \times 9.8} + (3.0 - 2.0) + \frac{2.0^2 - 8.0^2}{2 \times 9.8}$$

$$= 5.102 + 1.0 - 3.061$$

$$= 3.04\mathrm{m}$$

③速度水頭　$\dfrac{U_2^2}{2g} = \dfrac{8.0^2}{2 \times 9.8} = 3.27\mathrm{m}$

3-3-A2

■連続式より，断面平均流速 U_2 を求める。

$$Q = A_1 \cdot U_1 = A_2 \cdot U_2$$

$$U_2 = \frac{A_1}{A_2} \cdot U_1 = \frac{D_1^2}{D_2^2} \cdot U_1 = \frac{0.60^2}{0.20^2} \times 1.0 = 9.00\,\mathrm{m/s}$$

■圧力水頭

断面 1 と 2 でベルヌーイの定理を考える。

$$z + \frac{p_1}{\rho g} + \frac{U_1^2}{2g} = z + \frac{p_2}{\rho g} + \frac{U_2^2}{2g}$$

位置水頭 z は断面 1 と 2 で同じであるため無視できる。

$$\frac{p_1}{\rho g} + \frac{U_1^2}{2g} = \frac{p_2}{\rho g} + \frac{U_2^2}{2g}$$

式を整理すると以下のようになる。

$$\frac{p_2}{\rho g} = \frac{p_1}{\rho g} + \frac{U_1^2 - U_2^2}{2g} = 1.0 + \frac{1.000^2 - 9.000^2}{2 \times 9.8} = -3.08\mathrm{m}$$

3-3-A3

(1) 点 B から流出する断面平均流速 U を表す式の誘導

点 A と B でベルヌーイの定理を考え，点 B の位置を基準面とする。点 A では，水面の流速は 0.0m/s であり，点 A と B の両方で大気接しているため，圧力は 0.0Pa となる。これらの条件より，点 A と B のベルヌーイの式は以下のようになる。

$$(h_1 + h_2) + 0 + 0 \quad = \quad 0 + 0 + \frac{U^2}{2g}$$

(点 A) = (点 B)

これらを整理し，点 B での断面平均流速 U を表す式を求めると以下のようになる。

$$U = \sqrt{2g(h_1 + h_2)}$$

(2) 点 B から流出する流量 Q の計算

■接続されている管路の断面積 A の計算

$$A = \frac{\pi D^2}{4} = \frac{\pi \times 0.20^2}{4} = 0.03142\,\mathrm{m}^2$$

■点 B での断面平均流速 U の計算

$$U = \sqrt{2 \times 9.8 \times (5.0 + 5.0)} = 14.00\,\mathrm{m/s}$$

■流量 Q の計算

$$Q = A \cdot U = 0.03142 \times 14.00 = 0.440\,\mathrm{m^3/s}$$

3-3-A4

大気中の流体の移動も質点系の力学と同様に考えることができる。既に学んでいる質点系の力学では，ある質点の水平方向と鉛直方向の移動は，以下の式で示される。

水平距離 x　　$x = U \cdot t$

鉛直距離 y　　$y = \dfrac{1}{2} \cdot g \cdot t^2$

これらより，鉛直距離 y の式を変形し，水平距離 x に代入すると以下のようになる。

鉛直距離 y の式を変形　$t = \sqrt{\dfrac{2y}{g}}$

水平距離の式に代入　$x = U\sqrt{\dfrac{2y}{g}}$

水槽底面から流出点までの高さ y および流出点での断面平均流速 U を求めることで，流水が到達する水平距離 x を計算することができる。

水槽から流出する水の断面平均流速 U はトリチェリの定理によって求めることができる。水面から流出口までの高さを h とすれば h=2.0m となり，以下のように計算できる。

$$U = \sqrt{2gh} = \sqrt{2.0 \times 9.8 \times 2.0} = 6.261\,\mathrm{m/s}$$

水平距離 x の式に代入すると以下のようになる。

$$x = 6.261 \times \sqrt{\frac{2.0 \times 3.0}{9.8}} = 4.90\mathrm{m}$$

演習問題　B

3-3-B1

(1) 各点 A～G の圧力を計算

■点 A の圧力

点 A は大気に接しているため p_A=0.0Pa となる。

■点 B の圧力

点 B では，水槽側と管路側で値が異なるため，圧力はそれぞれ計算する必要がある。

<点 B 水槽側>

水槽側の点 B の圧力は，点 A と B でベルヌーイの定理を考えることで求めることができる。基準面を点 B の位置として点 A と B の計算条件を考えると，点 A では流速 U_A=0.0m/s，圧力 p_A=0.0Pa，位置水頭 z_A=h，基準面を点 B の位置とすれば位置水頭 z_B=0.0，水槽内では流速がほぼ 0.0m/s のため点 B の断面平均流速 U_B=0.0m/s とでき，ベルヌーイの式は以下のようになる。

$$h + 0 + 0 \quad = \quad 0 + \frac{p_B(\text{水槽側})}{\rho g} + 0$$

(点 A) = (点 B 水槽側)

整理すると，点 B の水槽側の圧力 p_B は以下のようになる。

$$p_B(\text{水槽側}) = \rho g h$$

< 点 B 管路側>

管路側の点 B の圧力は, 点 B と C でベルヌーイ定理を考えることで求めることができる。計算条件は，基準面を点 C の位置とすると位置水頭 z_C=0.0m，点 C は大気に接しているため p_C=0.0Pa，管径が同一であるため $U_B=U_C$ である。点 B の管路側の圧力を p_B(管路側)とすれば，ベルヌーイの式は以下のようになる。

$$2L + \frac{p_B(\text{管路側})}{\rho g} + \frac{U_B^2}{2g} \quad = \quad 0 + 0 + \frac{U_c^2}{2g}$$

(点 B 管路側) = (点 C)

整理すると以下のようになる。

$$p_B(\text{管路側}) = -2\rho g L$$

■点 C の圧力

点 C は大気に接しているため，圧力 p_C=0.0Pa である。

■点 D の圧力

水槽側と管路側で圧力が異なるため，両者にして圧力を求める。

<点 D 水槽側>

点 A と点 D においてベルヌーイの式を考える。基準面を点 D の高さとすると以下のようになる。

$$h + 0 + 0 \quad = \quad 0 + \frac{p_D(\text{水槽側})}{\rho g} + 0$$

(点 A) = (点 D 水槽側)

整理すると以下のようになる。

$$p_D(\text{水槽側}) = \rho g h$$

<点 D の管路側>

点 D と点 G(管路の出口)においてベルヌーイの式を考える。基準面を点 D の高さとして，点 D の管路側の圧力を p_D(管路側)とすれば，ベルヌーイの式は以下のようになる。

$$0 + \frac{p_D(\text{管路側})}{\rho g} + \frac{U_D^2}{2g} \quad = (-L) + 0 + \frac{U_G^2}{2g}$$

(点 D 管路側) = (点 G)

条件より，管径が一定のため $U_D=U_G$ とすると下記のようになる。

$$p_D(\text{管路側}) = -\rho g L$$

■点 E の圧力

点 E の圧力は，点 D と点 E でベルヌーイの定理を考えることで求めることができる。計算条件は, 基準面を点 E の位置とすれば, 点 E の位置水頭 z_E=0.0m, 管径が一定のため $U_D=U_E$ となる。

$$2L + \frac{p_D(\text{管路側})}{\rho g} + \frac{U_D^2}{2g} \quad = \quad 0 + \frac{p_E}{\rho g} + \frac{U_E^2}{2g}$$

(点 D)　=　(点 E)

点 D の圧力 p_D(管路側)は既に計算されているため，以下のようになる。

$$2L - \frac{\rho g L}{\rho g} \quad = \quad \frac{p_E}{\rho g}$$

$$p_E = \rho g L$$

■点 F の圧力

点 F の圧力は，点 E と F でベルヌーイの定理を考える。計算条件は，基準面を点 F の位置とすれば，点 E と F の位置水頭 $z_E=z_F=0.0$m，点 E の圧力は先ほど求めた値 $p_E=\rho gL$，管路径が一定のため $U_E=U_F$ となる。

$$0 + \frac{\rho g L}{\rho g} + \frac{U_G^2}{2g} \quad = \quad 0 + \frac{p_F}{\rho g} + \frac{U_F^2}{2g}$$

(点 E)　=　(点 F)

整理すると以下のようになる。

$$p_F = \rho g L$$

■点 G の圧力(流出側から順に計算する)

点 G では，大気圧に接しているため $p_G=0.0$Pa となる。

(2) 管路から流出する断面平均流速 U_C および U_G の計算

■点 C の断面平均流速 U_C の計算

点 A と C でベルヌーイの定理を考える。計算条件は，点 A と C は大気に接しているため $p_A=p_C=0.0$Pa，基準面を点 C とすれば，位置水頭 $z_C=0.0$m できる。さらに，貯水槽内では流速はほぼないため，点 A の流速 $U_A=0.0$m/s となる。これらを整理するとベルヌーイの式は以下のようになる。

$$(2L+h)+0+0 \quad = \quad 0+0+\frac{U_C^2}{2g}$$

(点 A)　=　(点 C)

整理すると以下のようになる。

$$U_C = \sqrt{2g(2L+h)}$$

■点 G の断面平均流速 U_G の計算

点 A と G でベルヌーイの定理を考える。計算条件は，点 A と G は大気に接しているため $p_A=p_G=0.0$Pa，基準面を点 G の位置に設定すれば，点 G の位置水頭 $z_G=0.0$m となる。水槽内の流速はほぼないため，点 A の流速 $U_A=0.0$m/s である。これらを整理するとベルヌーイの式は以下のようになる。

$$(L+h)+0+0 \quad = \quad 0+0+\frac{U_G^2}{2g}$$

(点 A)　=　(点 D)

整理すると以下のようになる。

$$U_G = \sqrt{2g(L+h)}$$

3-3-B2

大気中を流出する水の運動は，質点系の力学と同様に以下の式で，水平距離 x と鉛直距離 y を計算することができる。

水平距離　$x = U \cdot t$　，　鉛直距離　$y = \frac{1}{2} \cdot g \cdot t^2$

水平距離 x と鉛直距離 y の式の t を消去して整理すると以下のようになる。

$$x = U\sqrt{\frac{2y}{g}}$$

ここで，地面から水槽の流出孔の位置を y として，トリチェリの定理を用いて流出孔からの断面平均流速 U を求めることで，水平距離 x を求めることができる。

鉛直距離 y　$y = \frac{h}{2} + \frac{h}{2} = h$

断面平均流速 U　$U = \sqrt{2g\frac{h}{2}} = \sqrt{gh}$

水平距離 x　$x = \sqrt{gh} \cdot \sqrt{\frac{2h}{g}} = 1.41h$

3-3-B3

パイプの出口位置と h だけ落下した位置でベルヌーイの式を考えることで計算できる。

まず，h だけ落下した位置の断面平均流速 U の計算を行う。連続式より，h だけ落下した位置の断面平均流速 U を計算すると以下のようになる。

$$Q = A \cdot U = A_0 \cdot U_0$$

$$U = \frac{A_0}{A} \cdot U_0 = \frac{\pi \cdot D_0^2 / 4}{\pi \cdot D^2 / 4} = \frac{D_0^2}{D^2} U_0$$

ここで，A は h だけ落下した位置の流水断面積である。

次にベルヌーイの式を考える。基準面は h だけ落下した位置とする。パイプの出口位置および h だけ落下した位置では大気中に接しているため圧力 p は 0.0Pa である。これらの条件より，以下のようになる。

$$h + 0 + \frac{U_0^2}{2g} = 0 + 0 + \frac{U^2}{2g}$$

$$h + \frac{U_0^2}{2g} = \frac{U^2}{2g}$$

連続式から求めた断面平均流速 U を代入すると

$$h+\frac{U_0^2}{2g}=\frac{U_0^2}{2g}\left(\frac{D_0^2}{D^2}\right)^2$$

$$\frac{2g}{U_0^2}h+1=\left(\frac{D_0^2}{D^2}\right)^2$$

$$D^4=D_0^4\left(\frac{2gh}{U_0^2}+1\right)^{-1}$$

$$D=D_0\left(\frac{2gh}{U_0^2}+1\right)^{-1/4}$$

3-3-B4

■水槽 1

トリチェリの定理を利用することで，断面平均流速 U_1 を計算することができる。

$$U_1=\sqrt{2gh}$$

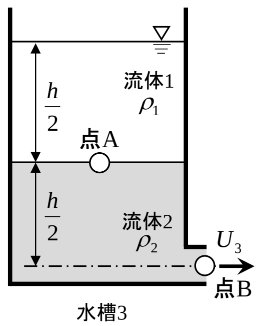
■水槽 2

トリチェリの定理は，流体の密度に依存しないため，水槽 1 と同様の結果となる。

$$U_2=\sqrt{2gh}$$

■水槽 3

ベルヌーイの定理は，密度が一様な流体のみで適用できることから，点 A と B でベルヌーイの式を考える。図のように基準面を点 B の位置に設定した場合，点 B の位置水頭 z_B=0.0m となる。また，点 B は大気に接しているため p_B=0.0Pa，点 A では流体の出口から十分に離れていることから断面平均流速 U_A=0.0m/s とすれば，ベルヌーイの式は以下のようになる。



$$\frac{h}{2}+\frac{p_A}{\rho g}+0 \quad = \quad 0+0+\frac{U_3^2}{2g}$$

(点 A) = (点 B)

整理すると以下のようになる。

$$U_3 = \sqrt{g \cdot h + \frac{2}{\rho} p_A}$$

ここで，点 A に作用する圧力 p_A を，流体 1 の静水圧とすれば以下のようになる。

点 A の圧力　$p_A = \rho_1 g \frac{h}{2}$　(流体 1 の静水圧)

断面平均流速　$U_3 = \sqrt{g \cdot h + \frac{2}{\rho_2}(\rho_1 g \frac{h}{2})}$

$$= \sqrt{(1 + \frac{\rho_1}{\rho_2})gh}$$

流体の密度が $\rho_1 < \rho_2$ のときの流速が早くなる順番は，下記のようになる。各水槽の断面平均流速を整理すると，

水槽 1 と 2　$U_1 = U_2 = \sqrt{2gh}$

水槽 3　$U_3 = \sqrt{(1 + \frac{\rho_1}{\rho_2})gh}$

$\rho_1 < \rho_2$ のとき，水槽 3 の式は $\left(1 + \frac{\rho_1}{\rho_2}\right) < 2.0$ となるため，水槽 3 の断面平均流速は，水槽 1 と 2 より小さくなる。

したがって，各水槽の断面平均流速の順番は，以下となる。

(水槽 1)　=　(水槽 2)　>　(水槽 3)

３－４

予習

１． 地球の重力場では,

$$U(t+dt) = U(t) + \frac{dU(t)}{dt}dt = U(t) + gdt$$

宇宙区間では,

$$U(t+dt) = U(t)$$

２．

$M = m_1 U_1 = m_2 U_2$　より

$$m_2 = \frac{m_1 U_1}{U_2} = \frac{0.2 \times 35}{20} = 0.35\text{kg}$$

演習問題　A

3-4-A1

（1）

$$F = \rho Q U_1 = A U_1^{\ 2} = \rho \frac{\pi D^2}{4} U_1^{\ 2} = 1000 \times \frac{3.14 \times 0.12^2}{4} \times 2.4^2$$

$$= 65.1\,\mathrm{N}$$

（2）噴流と板との相対速度は，$U_1 + U_2$ であるから，見かけ上、$Q = (U_1 + U_2)A$ となる。
したがって，

$$F = \rho Q(U_1 + U_2) = \rho A(U_1 + U_2)^2 = \rho \frac{\pi D^2}{4}(U_1 + U_2)^2$$

$$= 1000 \times \frac{3.14 \times 0.12^2}{4} \times (2.4 + 0.4)^2$$

$$= 88.6\,\mathrm{N}$$

3-4-A2

連続の式より，$U_2 = U_1$

運動量保存則は，$-\rho Q U_2 - (\rho Q U_1) = -F$ となるから，

$$F = \rho Q U_1 + \rho Q U_2 = 2\rho A U_1^{\ 2} = 2 \times 1000 \times \frac{3.14 \times 0.08^2}{4} \times 1.6^2$$

$$= 25.7\,\mathrm{N}$$

3-4-A3

$$Q = \sqrt{\frac{\pi D^2 W_P}{4\rho}} \sqrt{\sin\theta} = \sqrt{\frac{3.14 \times 0.4^2 \times 9.8}{4 \times 1000}} \sqrt{\sin 30^\circ}$$

$$= 0.0248\,\mathrm{m^3/s}$$

演習問題　B

3-4-B1

$$U_1 = \frac{Q}{\pi D_1^{\ 2}/4} = \frac{4 \times 0.04}{3.14 \times 0.12^2} = 3.539\,\mathrm{m/s}$$

$$U_2 = \frac{Q}{\pi D_1^{\ 2}/4} = \frac{4 \times 0.04}{3.14 \times 0.08^2} = 7.962\,\mathrm{m/s}$$

$$p_1 = \rho g\left(\frac{U_2^{\ 2}}{2g} - \frac{U_1^{\ 2}}{2g}\right) = \frac{\rho}{2}\left(U_2^{\ 2} - U_1^{\ 2}\right)$$

$$= \frac{1000}{2}\left(7.962^2 - 3.539^2\right) = 25.43 \times 10^3\ \mathrm{Pa}$$

x 方向の運動量保存則より，

$$\frac{dM_x}{dx} = \rho Q U_2 \cos\theta - \rho Q U_1 = p_1 \frac{\pi D_1^{\ 2}}{4} - F_x$$

$$F_x = \rho QU_1 - \rho QU_2 \cos\theta + p_1 \frac{\pi D_1{}^2}{4} = \rho Q(U_1 - U_2 \cos\theta) + p_1 \frac{\pi D_1{}^2}{4}$$

$$= 1000 \times 0.04 \times (3.539 - 7.962 \times \cos 30^\circ) + 25.43 \times 10^3 \times \frac{3.14 \times 0.12^2}{4}$$

$$= 153.2\,\mathrm{N}$$

一方，y 方向の運動量保存則より，F_y を上向きに正とすると，

$$\frac{dM_y}{dx} = \rho QU_2 \sin\theta - 0 = F_y$$

$$F_y = \rho QU_2 \sin\theta = 1000 \times 0.04 \times 7.962 \times \sin 30^\circ$$

$$= 159.2\,\mathrm{N}$$

したがって，

$$F = \sqrt{F_x{}^2 + F_y{}^2} = \sqrt{153.2^2 + 159.2^2}$$

$$= 221\,\mathrm{N}$$

3-4-B2

板に垂直方向の運動量保存則より，

$$0 - \rho Q_1 U_1 \cos\theta = -F$$

よって，$F = \rho Q_1 U_1 \cos\theta$

一方，板に沿う方向の運動量保存則を考えると，

$$\rho Q_2 U_2 - \rho Q_3 U_3 - \rho Q_1 U_1 \sin\theta = 0$$

断面Ⅰ，Ⅱ，Ⅲで圧力は全てゼロなので，ベルヌーイの式から $U_1 = U_2 = U_3$ となる。連続の式は $Q_1 = Q_2 + Q_3$ となるので，これらの関係を上式に代入して整理すると，

$$\frac{Q_2}{Q_1} = \frac{1+\sin\theta}{2}, \qquad \frac{Q_3}{Q_1} = \frac{1-\sin\theta}{2}$$

となる。

3-4-B3

合流前後（断面ⅠとⅡ）で x 方向の運動量保存則（全水路幅当たりの比力が等しい）を考えると，

$$\frac{B}{\sqrt{2}}\left(\frac{h_1^2}{2} + \frac{\left(\dfrac{Q/2}{B/\sqrt{2}}\right)^2}{gh_1}\right) \times \frac{1}{\sqrt{2}} \times 2 = B\left(\frac{h_2^2}{2} + \frac{(Q/B)^2}{gh_2}\right)$$

$$\frac{h_1^2}{2}+\frac{(Q/B)^2}{2gh_1}=\frac{h_2^2}{2}+\frac{(Q/B)^2}{gh_2}$$

両辺に $2h_1/h_2^3$ を乗じ，$\lambda = h_1/h_2, F_r^{\ 2} = (Q/B)^2/(gh_2^{\ 3})$ とおいて整理すると，次式となる。

$$\lambda^3-(1+2F_r^{\ 2})\lambda+F_r^{\ 2}=0$$

上式にB＝10m，Q＝25m^3/s，h_2＝1.4mを代入し，ニュートン・ラフソン法を用いて解けば，下表のようである（λの初期値を1.0とする）。

λ	$f(\lambda)$	$f'(\lambda)=3\lambda^2-(1+2F_r^2)$	$\lambda-\dfrac{f(\lambda)}{f'(\lambda)}$
1.000	-0.232	1.535	1.151
1.151	0.072	2.512	1.123
1.123	0.003	2.316	1.121
1.121	0.000	2.308	1.121

よって，λ＝1.12である。

３－５

予習

１．

$$\omega_1+\omega_2=(x_1+x_2)+i(y_1+y_2)$$

$$\omega_1\times\omega_2=(x_1x_2-y_1y_2)+i(x_1y_2+x_2y_1)$$

$$\frac{\omega_1}{\omega_2}=\frac{x_1x_2+y_1y_2}{x_2^2+y_2^2}+i\frac{x_2y_1-x_1y_2}{x_2^2+y_2^2}$$

$$\omega_1^2=(x_1^2-y_1^2)+i(2x_1y_1)$$

２． $\omega^n=(re^{i\theta})^n=r^ne^{in\theta}$

３． $\dfrac{dx}{u}=\dfrac{dy}{v}$ より、$\dfrac{dx}{3}=\dfrac{dy}{2x^2}$

$$\rightarrow 2x^2dx=3dy$$

これを積分すると，$3y=x^3+C$ となり，原点（0,0）を通る流線上では，C=0 となる。よって，

$$y=\frac{x^3}{3}$$

また，$\dfrac{\partial u}{\partial x}+\dfrac{\partial v}{\partial y}=\dfrac{\partial 3}{\partial x}+\dfrac{\partial (2x^2)}{\partial y}=0$

より，連続の式を満足する。

演習問題　A

3-5-A1

(a) $\gamma_z=\dfrac{\partial u}{\partial y}-\dfrac{\partial v}{\partial x}=\dfrac{\partial (ky)}{\partial y}-\dfrac{\partial (-kx)}{\partial x}=2k\neq 0$

(b) $\gamma_z=\dfrac{\partial u}{\partial y}-\dfrac{\partial v}{\partial x}=\dfrac{\partial (3x^2-2y)}{\partial y}-\dfrac{\partial (-2x+4y)}{\partial x}=-2+2=0$

(c)
$$\gamma_z=\frac{\partial u}{\partial y}-\frac{\partial v}{\partial x}=\frac{\partial (-\frac{\sin\theta}{r})}{\partial y}-\frac{\partial (\frac{\cos\theta}{r})}{\partial x}=\frac{\partial (-\frac{\sin\theta}{r})}{\partial \theta}\frac{d\theta}{dy}-\frac{\partial (\frac{\cos\theta}{r})}{\partial \theta}\frac{d\theta}{dx}$$
$$=-\frac{\cos\theta}{r}\frac{1}{r\cos\theta}+\frac{\sin\theta}{r}\left(-\frac{1}{r\sin\theta}\right)=-\frac{2}{r^2}\neq 0$$

よって，答えは(b)

3-5-A2

$$\Omega=Ce^{-i\delta}\omega=C(\cos\delta-i\sin\delta)(x+iy)$$
$$=C(x\cos\delta+y\sin\delta)-iC(x\sin\delta-y\cos\delta)$$

よって，

$\phi=C(x\cos\delta+y\sin\delta),\quad \psi=-C(x\sin\delta-y\cos\delta)$

$u=\dfrac{\partial\phi}{\partial x}=C\cos\delta,\quad v=\dfrac{\partial\phi}{\partial y}=C\sin\delta$

3-5-A3

$$\Omega=\frac{C}{\omega}=\frac{C}{re^{i\theta}}=\frac{1}{r}Ce^{-i\theta}=\frac{1}{r}C\cos\theta-i\frac{1}{r}C\sin\theta$$

よって，

$\phi=\dfrac{C\cos\theta}{r},\quad \psi=-\dfrac{C\sin\theta}{r}$

$u_r=\dfrac{\partial\phi}{\partial r}=\dfrac{\partial\psi}{r\partial\theta}=-\dfrac{C\cos\theta}{r^2}$，$u_\theta=\dfrac{\partial\phi}{r\partial\theta}=-\dfrac{\partial\psi}{\partial r}=-\dfrac{C\sin\theta}{r^2}$

演習問題　B

3-5-B1

$$u=\frac{\partial\phi}{\partial x}=\frac{\partial (x^3-3xy)}{\partial x}=3x^2-3y$$
$$v=\frac{\partial\phi}{\partial y}=\frac{\partial (x^3-3xy)}{\partial y}=-3x$$

ψ の定義より，

$$\psi = \int -vdx = \int 3xdx = \frac{3}{2}x^2 + C(y)$$

$$\psi = \int udy = \int (3x^2 - 3y)dy = 3x^2 y - \frac{3}{2}y^2 + C(x)$$

よって，

$$\psi = 3x^2 y + \frac{3}{2}x^2 - \frac{3}{2}y^2 + C$$

（$C(x), C(y)$ はそれぞれ，x，y のみの関数，C は定数）

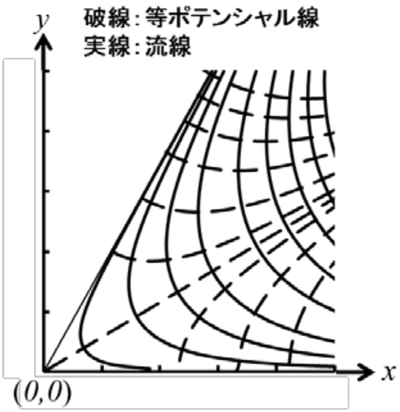
3-5-B2

$$\Omega = \omega^3 = (x+iy)^3 = (x^3 - 3xy^2) + i(3x^2 y - y^3)$$
$$= \phi + i\psi$$

よって，

$$\phi = x^3 - 3xy^2, \quad \psi = 3x^2 y - y^3$$

$\phi = \phi_C$ ：一定，　$\psi = \psi_C$ ：一定と置いて図示すると，以下のようである。



また，

$$u = \frac{\partial \phi}{\partial x} = \frac{\partial (x^3 - 3xy^2)}{\partial x} = 3x^2 - 3y^2$$

$$v = \frac{\partial \phi}{\partial y} = \frac{\partial (x^3 - 3xy^2)}{\partial y} = -6xy$$

3-5-B3

$$\Omega = C\left(\omega + \frac{a^2}{\omega}\right) = C\left(re^{i\theta} + \frac{a^2}{re^{i\theta}}\right) = C\left(r\cos\theta + \frac{a^2}{r}\cos\theta\right) + iC\left(r\sin\theta - \frac{a^2}{r}\sin\theta\right)$$
$$= \phi + i\psi$$

$$\phi = C\left(r + \frac{a^2}{r}\right)\cos\theta, \quad \psi = C\left(r - \frac{a^2}{r}\right)\sin\theta$$

また，

$$u_r = \frac{\partial \phi}{\partial r} = \frac{\partial}{\partial r}\left(C\left(r + \frac{a^2}{r} \right)\cos\theta \right) = C\left(1 - \frac{a^2}{r^2} \right)\cos\theta$$

$$u_\theta = \frac{\partial \phi}{r\partial \theta} = \frac{\partial}{r\partial \theta}\left(C\left(r + \frac{a^2}{r} \right)\cos\theta \right) = -C\left(1 + \frac{a^2}{r^2} \right)\sin\theta$$