６章　問題解答

6－１
予習
１．

(1) 連続式により，

$$U_A = \frac{Q}{A_A} = \frac{Q}{\pi d_A^2/4} = 0.7961$$

$$U_B = \frac{Q}{A_B} = \frac{Q}{\pi d_B^2/4} = 3.184$$

となる。よって円管 A，B の平均流速はそれぞれ 0.796m/s，3.18m/s となる。

(2) 円管 A，B にベルヌーイの式を適用して，

$$z_A + \frac{p_A}{\rho g} + \frac{U_A^2}{2g} = z_B + \frac{p_B}{\rho g} + \frac{U_B^2}{2g}$$

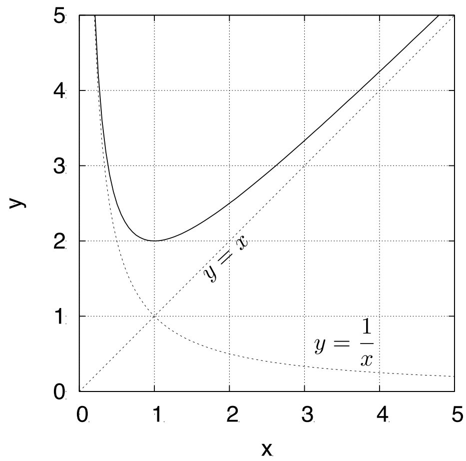
　問題の条件を当てはめて $p_B/\rho g$ を求めると，

$$\frac{p_B}{\rho g} = 5.417\mathrm{m}$$

よって円管 B 内の水圧は p_B＝5.31×10^4N/m² となる。

（3）圧力水頭と速度水頭の和が水面位置になるので，円管 B からの水面位置までの高さはこの場合圧力水頭 $p_B/\rho g$ に一致する。よって，5.42m になる。

２．　このグラフは関数 y=x と y＝1/x の和になるので，２つのグラフを描き，y の値を加えると良い。



また，最小値は dy/dx=0 を満たす x で生じるので，

$$\frac{dy}{dx} = 1 - \frac{1}{x^2} = 0$$

よって，x＝1 のとき y は最小値となる。このときの y を求めると 2 になる。

演習問題　Ａ
6-1-A1
問題の条件から，限界水深は式 6-11 より，

$$h_c = \sqrt[3]{\frac{Q^2}{gB^2}} = \sqrt[3]{\frac{6^2}{9.8 \times 4^2}} = 0.6123(\mathrm{m})$$

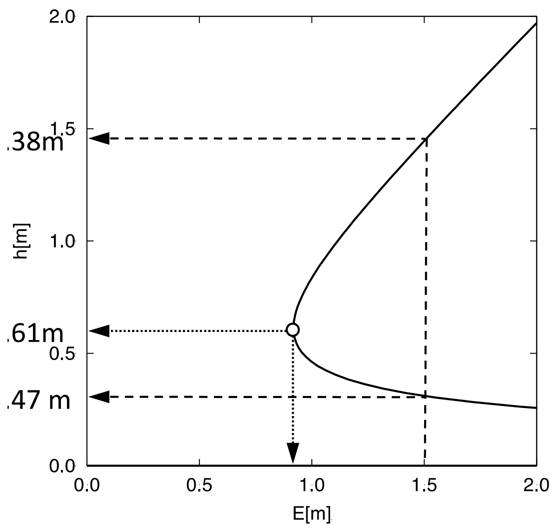
また，このときの比エネルギーは式(6-12)より，

$$E_{min} = \frac{3}{2}h_c = 0.9184(\mathrm{m})$$

となる。よって限界水深は 0.612m，最小の比エネルギーは 0.918m である。

6-1-A2

作図すると下図のようになる。



比エネルギーが 1.5m のときの交代水深を求めると，それぞれ，1.38m と 0.47m が読み取れる。

6-1-A3

流量は限界水深で流れるとき最大となる。限界水深 hc は比エネルギーを用いて，

$$hc = \frac{2}{3}E$$

この時の単位幅流量は,

$$q_{max} = \sqrt{2ghc^2(E-hc)} = \sqrt{2g\left(\frac{2}{3}E\right)^2\left(E-\frac{2}{3}E\right)} = \left(\frac{2}{3}E\right)^{3/2}\sqrt{g} = 0.213\mathrm{m}^2/\mathrm{s}$$

よって，水路に流すことのできる最大流量は,

$$Q_{max} = q_{max} \times B = 0.213 \times 3 = 0.639\mathrm{m}^3/\mathrm{s}$$

となる。

演習問題　B

6-1-B1

上流側断面と下流側断面で比エネルギーは等しいので,

$$E = \frac{q^2}{2gh_1^2} + h_1 = \frac{q^2}{2gh_2^2} + h_2$$

$$
\begin{aligned}
h_1 - h_2 &= \frac{q^2}{2g}\left(\frac{1}{h_2^2} - \frac{1}{h_1^2}\right) \\
&= \frac{q^2}{2g}\frac{(h_1+h_2)(h_1-h_2)}{h_1^2 h_2^2}
\end{aligned}
$$

よって，

$$q^2 = \frac{2gh_1^2h_2^2}{h_1+h_2}$$

流量は，単位幅流量に幅を乗じて，

$$Q = B\sqrt{\frac{2gh_1^2h_2^2}{h_1+h_2}}$$

が得られる。

6-1-B2

ヒントに示したように，限界水深が

$$\frac{Q^2}{gA^3}\frac{\partial A}{\partial h} = 1 \qquad (1)$$

を満たす断面であること，$\partial A/\partial h$が水面幅 B を表していることに注意して，通水断面積 A と水面幅を求めれば良い。

(1)三角形断面水路

三角形断面では，

$$A = \frac{1}{2}Bh, \quad B = 2h\tan\theta$$

であるので，

$$A = h^2\tan\theta$$

$\partial A/\partial h$が水面幅 B を表していることに注意して，これを(1)に代入すると，

$$\frac{Q^2}{2g}\left(\frac{2}{h^6\tan^3\theta}\right)2h\tan\theta = 1$$

$$h^5 = \frac{2Q^2}{g\tan^2\theta}$$

が得られる。この水深 h が限界水深 hc に相当するので，

$$hc = \sqrt[5]{\frac{2Q^2}{g\tan^2\theta}}$$

となる。

(2)放物線形断面水路

図 6-10 に示されるように，水面幅を B とすると，

$$B = 2\sqrt{ph}$$

水深 h のときの通水断面積 A は

$$A = \int_0^h \sqrt{py}dy = \frac{4}{3}\sqrt{p}h^{3/2}$$

と表される。$\partial A/\partial h$ が水面幅 B を表していることに注意して，これを(1)に代入すると，

$$\frac{Q^2}{g\left(\frac{4}{3}\sqrt{p}h^{3/2}\right)^3}2\sqrt{ph}=\frac{27Q^2}{32gph^4}=1$$

よって，

$$h_c=\left(\frac{27Q^2}{32gp}\right)^{1/4}$$

となる。

６－２

予習

１．

長方形断面水路の場合，比エネルギーは式(6.8)に示したように

$$E=h+\frac{Q^2}{2gB^2h^2}$$

で表される。限界水深では比エネルギー最小となる水深なので，$\partial E/\partial h=0$を満たす。よって，

$$\frac{\partial E}{\partial h}=1-\frac{Q^2}{gB^2h^3}=0$$

このときの h が限界水深になる。これを求めると，

$$h_c=\sqrt[3]{\frac{Q^2}{gB^2}}$$

となる。この時の流速 U は,

$$U=\frac{Q}{Bh_c}$$

両辺を 2 乗して，

$$U^2=\frac{Q^2}{B^2h_c^3}h_c=\frac{Q^2}{B^2}\frac{gB^2}{Q^2}h_c=gh_c$$

よって，

$$U=\sqrt{gh_c}$$

となる。

２．

省略

演習問題　Ａ

6-2-A1（解答例）

表の通り。

	限界水深と流れの水深の大小関係	フルード数	流れの条件が決まる方向
常流	水深h＞限界水深hc	1より小さい	下流から上流に向かって決まる
射流	水深h＜限界水深hc	1より大きい	常流から下流に向かって決まる

6-2-A2

(1) この時の限界水深を求めると，

$$h_c = \sqrt[3]{\frac{Q^2}{gB^2}} = \sqrt[3]{\frac{2.8^2}{9.8 \times 4^2}} = 0.368\mathrm{m}$$

現在の水深は h=0.2m である。よって h<hc であるので，射流になる。

(2) この流れの平均流速は，

$$U = \frac{Q}{Bh} = \frac{2.8}{4 \times 0.2} = 3.5\mathrm{m/s}$$

フルード数は，

$$F_r = \frac{U}{\sqrt{gh}} = \frac{3.5}{\sqrt{9.8 \times 0.2}} = 2.5$$

Fr>1 となるので，やはり射流になる。

6-2-A3

越流部が限界水深となっているので，越流部の流速は限界流速に一致している。
限界流速は，

$$U_c = \sqrt{gh_c} = \sqrt{9.8 \times 2.1} = 4.536(\mathrm{m/s}) \fallingdotseq 4.54\mathrm{m/s}$$

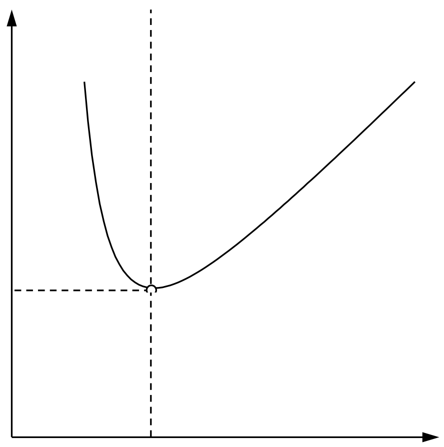
流量は，

$$Q = U \times A = U_c \times B \times h_c = 4.536 \times 10 \times 2.1 = 95.25\mathrm{m}^3/\mathrm{s} \fallingdotseq 95.3\mathrm{m}^3/\mathrm{s}$$

となる。

6-2-A4（解答例）

縦軸に比エネルギー，横軸に水深を取って比エネルギー図を描くと，以下のようになる。



水路床が隆起する前の流れの比エネルギーを E_1 とする。比エネルギーが E_1 になる水深は２つあるが，常流の流れは $h>hc$ であるので，このときの水深は h_1 になる。水路床が隆起すると，比エネルギーは減少して E_2 の大きさになる。常流側の曲線では，比エネルギーが低下すると水深も h_2 に低下するののので水面は低下することになる。

演習問題　B

6-2-B1

このときの平均流速 Uは

$$U = \frac{Q}{A} = \frac{Q}{h^2 \tan\theta} \qquad (1)$$

で表される。今，ある流量 Q'の水深 h が限界水深 hc に一致していた場合，流速は長波の伝搬速度 Cに一致するので，

$$C = \frac{Q'}{h^2 \tan\theta} \qquad (2)$$

である。(2)式の h は限界水深であるので，6－1の演習問題B-２(1)より，

$$h^5 = \frac{2Q'^2}{g \tan^2\theta} \qquad (3)$$

これを変形して，

$$\frac{Q'^2}{\tan^2\theta} = \frac{gh^5}{2} \qquad (3)'$$

が得られる。(3)’式を(2)式に代入して，

$$C = \frac{1}{h^2}\sqrt{\frac{gh^5}{2}} = \sqrt{\frac{gh}{2}}$$

フルード数は長波の伝搬速度に対する流速の比であるので，

$$F_r = \frac{U}{C} = \frac{Q}{h^2 \tan\theta}\sqrt{\frac{2}{gh}} = \sqrt{\frac{2Q^2}{gh^5 \tan^2\theta}}$$

となる。

6-2-B2

全区間でエネルギー損失を無視できるので，隆起部の高さは断面Ⅰと隆起部の断面（ここでは断面Ⅲとする）の比エネルギーの差になる。

まず，単位幅流量 q を求め，断面Ⅰの比エネルギーと限界水深を求める。

断面Ⅰ，Ⅱで比エネルギーは等しいので，

$$E = \frac{q^2}{2gh_1^2} + h_1 = \frac{q^2}{2gh_2^2} + h_2$$

これを変形して q を求めると，

$$q^2 = \frac{2gh_1^2 h_2^2}{h1 + h2} = \frac{2 \times 9.8 \times 1.2^2 \times 0.25^2}{1.2 + 0.25} = 1.2165$$

よって，断面Ⅰの比エネルギーは，

$$E_1 = h_1 + \frac{q^2}{2gh_1} = 1.2 + \frac{1.2165}{2 \times 9.8 \times 1.2^2} = 1.243\text{m}$$

隆起部の限界水深は，

$$h_c = \sqrt[3]{\frac{q^2}{g}} = \sqrt[3]{\frac{1.2165}{9.8}} = 0.499\text{m}$$

である。このときの比エネルギーは式(6-16)より Ec=1.5hc であるので，隆起部の高さ h_dは，

$h_d = E_1 - E_c = 1.243 - 1.5 \times 0.499 = 0.495\text{m}$

となる。

６－３

予習

１.

ホース内部を断面１とノズル出口を断面２として，断面１−２間に運動量保存則を適用すると良い。

断面１，２の流速は

連続式より，U_1=0.6366(m/s)，U_2=3.145(m/s)である。

ベルヌーイの定理により断面１の水圧を求めると，

$$\frac{p_1}{\rho g}+\frac{U_1^2}{2g}=\frac{p_2}{\rho g}+\frac{U_2^2}{2g}$$

p_2=0 であるので，

$$\frac{p_1}{\rho g}=\frac{U_2^2-U_1^2}{2g}=0.4839$$

よって，p=4.742 k Pa

となる。ノズルに作用する力をＦとして断面１−２間に運動量保存則を適用すると，

$$p_1A_1-F=\rho Q(U_2-U_1)$$

$$F=p_1A_1-\rho Q(U_2-U_1)=24.68$$

よって，24.7N の力になる。

２.

比力と水深の関係は図 6-11 を参照。概形は

$$Fs=\frac{q^2}{gh},\quad Fs=\frac{h^2}{2}$$

のグラフの和であらわせばよい。

比力が最小となる水深は，

$$\frac{\partial Fs}{\partial h}=-\frac{q^2}{gh^2}+h=0$$

を満たすので，

$$h=\sqrt[3]{\frac{q^2}{g}}$$

となる。

演習問題　Ａ

6-3-A1

基本的には例題 6-3-1 と同様に解けば良い。このときの流量は，

$$q^2=\frac{2gh_1^2h_2^2}{h_1+h_2}=12.25$$

流量は，単位幅流量に幅を乗じて，

$$Q=B\times q=17.50\mathrm{m}^3/\mathrm{s}$$

この場合のゲートに作用する単位幅あたりの力 F' は，

$$F'=\left(\frac{\rho q^2}{h_1}+\frac{\rho g h_1^2}{2}\right)-\left(\frac{\rho q^2}{h_2}+\frac{\rho g h_2^2}{2}\right)=52.51$$

これに幅 5m を乗ずれば，ゲート全体に作用する力は，263kN となる。

6-3-A2

この場合，跳水前の水深 h_2 と跳水後の水深 h_3 は共役水深の関係にあるので，式(6-40)をこの問題に合わせて書きなおして，h_2 を求めれば良い．

$$
\begin{aligned}
h_2 &= \frac{h_3}{2}\left(\sqrt{1+8Fr_3^2}-1\right) \\
&= \frac{h_3}{2}\left(\sqrt{1+8\frac{q^2}{gh_3^3}}-1\right) \\
&= \frac{2.4}{2}\left(\sqrt{1+8\frac{4^2}{9.8\times 2.4^3}}-1\right) \\
&= 0.4734
\end{aligned}
$$

跳水前の水深 h_2 は 0.473m となる．

また，跳水前後の損失水頭は

$$\Delta E = \frac{(h_3-h_2)^3}{4h_2h_3} = \frac{(2.4-0.4734)^3}{4\times 0.4734\times 2.4} = 1.574$$

よって，1.57m となる．

6-3-A3

跳水前後の水深は共役水深の関係になっているので，射流部・上流部の水深をそれぞれ h_1, h_2 とすると，

$$\frac{h_2}{h_1} = \frac{1}{2}\left(\sqrt{1+8F_{r1}^2}-1\right)$$

の関係が成立する。ここで，射流部のフルード数は,

$$F_{r1} = \frac{U_1}{\sqrt{gh_1}} = \frac{q}{h_1\sqrt{gh_1}}$$

と表すことができるので，この式を(1)式に代入すれば,

$$\frac{h_2}{h_1} = \frac{1}{2}\left(\sqrt{1+8\frac{q^2}{gh_1^3}}-1\right)$$

と表すことができるので，単位幅流量は,

$$q = \sqrt{\frac{gh_1^3}{8}\left\{\left(\frac{2h_2}{h_1}+1\right)^2-1\right\}} = 3.879$$

よって，単位幅あたりの流量は 3.88m²/s となる。

演習問題　B

6-3-B1

この場合，断面Ⅰ-Ⅱ間に作用する水路方向の力は，全水圧(P_1, P_2)と水路壁面（水と水路が接している面）に作用する摩擦による力，そして断面Ⅰ-Ⅱ間の水塊の重量の水路方向成分である。

(1)

水路壁面に作用する力を F_f，水塊の重量の水路方向成分を F_g として運動量保存則を適用

すると，

$$\rho QU_2 - \rho QU_1 = P_1 - P_2 + F_g - F_f$$

となる。式(6-33)を参考にすれば，

$$F_f - F_g = B\left(\frac{\rho q^2}{h_1} + \frac{\rho g h_1^2}{2}\right) - B\left(\frac{\rho q^2}{h_2} + \frac{\rho g h_2^2}{2}\right)$$

ここで，水塊の重量の水路方向成分を F_g は断面Ⅰ-Ⅱ間の水塊の体積を V として

$$Fg = \rho g V \sin\theta$$

ただし，

$$V = \frac{h_1 + h_2}{2} BL$$

となる。また，断面Ⅰ-Ⅱ間の水と水路が接している部分の面積をSとすると，これによる摩擦力は

$$F_f = \tau_0 S$$

ただし，

$$S = (h_1 + h_2 + B)L$$

以上を整理して

$$\tau_0 = \frac{B}{(h_1 + h_2 + B)L}\left\{\left(\frac{\rho q^2}{h_1} + \frac{\rho g h_1^2}{2}\right) - \left(\frac{\rho q^2}{h_2} + \frac{\rho g h_2^2}{2}\right) + \rho g \frac{h_1 + h_2}{2} L \sin\theta\right\}$$

となる。

6-3-B2

水路底面に作用する摩擦力を無視できるので，図中の記号を用いて断面Ⅰ,Ⅱの間で運動量保存則を適用すると，

$$\rho QU_2 - \rho QU_1 = P_1 + P_x - P_2 \qquad (1)$$

となる。ここで，P_x は跳水前の水深に相当する静水圧とみなせるので，

$$P_1 + P_x = \frac{1}{2}\rho g (h_1 + y_d)^2 B$$

と表すことができる。(1)式の平均流速を流量で表し，全水圧を水深を用いて表すと，

$$\frac{\rho Q^2}{B}\left(\frac{1}{h_2} - \frac{1}{h_1}\right) = \frac{1}{2}\rho g B\left\{(h_1 + y_d)^2 - h_2^2\right\}$$

両辺を ρ で除して，単位幅流量を用いて整理すると，

$$\frac{2q^2}{g}\left(\frac{h_2 - h_1}{h_1 h_2}\right) + (h_1 + y_d)^2 - h_2^2 = 0$$

これより，y_d を求めると，

$$y_d = \sqrt{\frac{2q^2}{g}\left(\frac{h_1 - h_2}{h_1 h_2}\right) + h_2^2} - h_1$$

となる。これに問題の条件を当てはめると，yd=2.21mとなる。

また，跳水による損失水頭は，

$$
\begin{aligned}
\Delta H &= H_1 - H2 \\
&= \left(z_1 + h_1 + \frac{U_1^2}{2g} \right) - \left(z_2 + h_2 + \frac{U_2^2}{2g} \right) \\
&= \left(z_1 + h_1 + \frac{q^2}{2gh_1^2} \right) - \left(z_2 + h_2 + \frac{q^2}{2gh_2^2} \right) \\
&= 2.436
\end{aligned}
$$

跳水による損失水頭は 2.44m になる。