７章　問題解答

7－１

予習

１．

長方形断面であるため，断面積 A と潤辺 S は，水深 h，水路幅 B を用い以下で表される。

$$A = Bh \ , \ \ S = B + 2h$$

径深 R の算定式に代入すると以下のようになる。

$$R = \frac{A}{S} = \frac{Bh}{B+2h} = \frac{h}{1+2(h/B)}$$

分母の h/B は河幅が水深に対して十分に広ければ，非常に小さな値となるため，上式は

$$R = \frac{h}{1+2(h/B)} \approx h$$

となり，径深 R は水深 h で近似できる。

２．

マニングの式の水深 h を等流水深 h_0 と置き換えると，以下の式となる。

$$Q = Bh_0 \frac{1}{n} h_0^{2/3} I_e^{1/2}$$

上式を h_0 について整理すると，以下の等流水深の式を得る。

$$h_0 = \left(\frac{nQ}{BI_e^{1/2}} \right)^{3/5}$$

演習問題　Ａ

7-1-A1

式７－３４を用いて収束計算により解を導く。すなわち，右辺に代入する水深を仮定値 h' とし，h' と求められた左辺 h との差（$|h-h'|$）が収束許容誤差 ε に収まればよい。ここで，収束許容誤差を 0.001m とし，初期の仮定値を 2.5m として計算を行う。

1 回目
$$h = \left(\frac{nQ}{bI_e^{1/2}} \right)^{3/5} \frac{\left(1+2\sqrt{1+a^2}\,h'/b\right)^{2/5}}{1+ah'/b}$$
$$= \left(\frac{0.025\times 100}{10\times\sqrt{1/300}} \right)^{3/5} \frac{\left(1+2\sqrt{1+2^2}\times 2.5/10\right)^{2/5}}{1+2\times 2.5/10} = 2.1686\,\mathrm{m}$$

仮定値との差は，$|2.1686-2.5| = 0.331\mathrm{m}$ となり，収束条件を満たさない。求められた左辺 h を新たな仮定値とすれば収束が進み，この作業を繰り返すことで以下のように解が得られる。

2 回目
$$h = \left(\frac{0.025\times 100}{10\times\sqrt{1/300}} \right)^{3/5} \frac{\left(1+2\sqrt{1+2^2}\times 2.1686/10\right)^{2/5}}{1+2\times 2.1686/10} = 2.2040\,\mathrm{m}$$

3 回目
$$h = \left(\frac{0.025\times 100}{10\times\sqrt{1/300}} \right)^{3/5} \frac{\left(1+2\sqrt{1+2^2}\times 2.2040/10\right)^{2/5}}{1+2\times 2.2040/10} = 2.2002\,\mathrm{m}$$

4 回目
$$h = \left(\frac{0.025\times 100}{10\times\sqrt{1/300}} \right)^{3/5} \frac{\left(1+2\sqrt{1+2^2}\times 2.2002/10\right)^{2/5}}{1+2\times 2.2002/10} = 2.2006\,\mathrm{m}$$

4 回目で得られた水深 h と仮定値との差は，$0.0004\mathrm{m} < 0.001\mathrm{m}$ となり，収束条件を満足し，水深 h は 4 回目の結果である 2.2006m となる。実用的には，非常に小さな桁は外すため 2.20m でよい。

7-1-A2

流水断面積 A（式７－３７）および径深 R（式７－３８）を求めた後，マニングの式により流量を求める。

$$A = \frac{D^2}{8}(\theta - \sin\theta) = \frac{3^2}{8}(3.665 - \sin 210^\circ) = 4.69\mathrm{m}^2$$

$$R = \frac{D}{4}\left(1 - \frac{\sin\theta}{\theta}\right) = \frac{3}{4}\left(1 - \frac{\sin 210^\circ}{3.665}\right) = 0.85\mathrm{m}$$

$$Q = A\frac{1}{n}R^{2/3}I^{1/2} = 4.69 \times \frac{1}{0.015} \times 0.85^{2/3} \times \left(\frac{1}{500}\right)^{1/2} = 12.6\ \mathrm{m}^3/\mathrm{s}$$

演習問題　B

7-1-B1

低水路と高水敷に分けてそれぞれの流量をマニングの式により算定する．まず，低水路の流水断面積 A，潤辺 S，径深 R を求め，その後流量を求める。

低水路の水面幅は 114m であることから，形状要素は以下のようになる。

$$A_1 = 114 \times 10 - 7 \times 7 = 1091\mathrm{m}^2$$

$$S_1 = 100 + 2 \times \sqrt{7^2 + 7^2} = 120\mathrm{m}$$

$$R_1 = \frac{A_1}{S_1} = \frac{1091}{120} = 9.09\mathrm{m}$$

低水路を流れる流量は，マニングの式を用いて，以下のように求められる。

$$Q_1 = A_1\frac{1}{n_1}R_1^{2/3}I^{1/2} = 1091 \times \frac{1}{0.02} \times 9.09^{2/3} \times \left(\frac{1}{2000}\right)^{1/2} = 5313\ \mathrm{m}^3/\mathrm{s}$$

次に高水敷は両岸が同じ形状であることから片側の形状要素は以下のようになる。

$$A_2 = 3 \times (56 + 50)/2 = 159\mathrm{m}^2$$

$$S_2 = 50 + \sqrt{6^2 + 3^2} = 56.7\mathrm{m}$$

$$R_2 = \frac{A_2}{S_2} = \frac{159}{56.7} = 2.80\mathrm{m}$$

高水敷を流れる流量は，両岸を考慮した以下の式により求められる。

$$Q_2 = 2A_2\frac{1}{n_2}R_2^{2/3}I^{1/2} = 2 \times 159 \times \frac{1}{0.04} \times 2.80^{2/3} \times \left(\frac{1}{2000}\right)^{1/2} = 353\ \mathrm{m}^3/\mathrm{s}$$

対象とする複断面河川を流れる全流量は，以下のようになる。

$$Q = Q_1 + Q_2 = 5313 + 353 = 5666\mathrm{m}^3/\mathrm{s}$$

7-1-B2

はじめに，中心角 α を，式７－39 を用いて算定する。

$$h = \frac{D}{2}\left(1 - \cos\frac{\theta}{2}\right) \quad \rightarrow \quad \theta = 2\cos^{-1}\left(1 - \frac{2h}{D}\right)$$

$$\theta = 2\cos^{-1}\left(1 - \frac{2h}{D}\right) = 2\cos^{-1}\left(1 - \frac{2 \times 0.7D}{D}\right) = 227^\circ = 3.965\mathrm{rad}$$

次に，流水断面積 A および径深 R を求める。

$$A=\frac{D^2}{8}(\theta-\sin\theta)=\frac{2^2}{8}(3.965-\sin 227^\circ)=2.35\mathrm{m}^2$$

$$R=\frac{D}{4}\left(1-\frac{\sin\theta}{\theta}\right)=\frac{2}{4}\left(1-\frac{\sin 227^\circ}{3.965}\right)=0.59\mathrm{m}$$

マニングの式（式 7－21）を変形し，水路勾配 I を求める。

$$I=\left(\frac{nQ}{AR^{2/3}}\right)^2=\left(\frac{0.022\times 8}{2.35\times 0.59^{2/3}}\right)^2=0.0113=\frac{1}{88}$$

7-1-B3

台形断面における水理学的に有利な断面は，正六角形の下半分の形状となることから，断面積 A および径深 R について式 7－55，式 7－56 の関係を用いて整理すると，以下のようになる。

$$A=\frac{3}{\sqrt{3}}h^2 \ ,\ R=\frac{1}{2}h$$

これを，マニングの式に当てはめると，以下の式が得られる。

$$Q=A\frac{1}{n}R^{2/3}I^{1/2}=\frac{3}{\sqrt{3}}h^2\frac{1}{n}\left(\frac{1}{2}h\right)^{2/3}I^{1/2}=\frac{1.09}{n}h^{8/3}I^{1/2}$$

上式に既知量をあてはめ水深 h を求める。

$$h=\left(\frac{nQ}{1.09I^{1/2}}\right)^{3/8}=\left(\frac{0.02\times 500}{1.09\times(1/1000)^{1/2}}\right)^{3/8}=8.38\mathrm{m}$$

水面幅 B は以下のように算定される。

$$B=b+2ah=\frac{2}{\sqrt{3}}h+2\frac{1}{\sqrt{3}}h=19.4\mathrm{m}$$

以上で回答は得られるが，確認のため，算出された水深をもとに流量を算定してみる。

$$Q=A\frac{1}{n}R^{2/3}I^{1/2}=\frac{3}{\sqrt{3}}h^2\frac{1}{n}\left(\frac{1}{2}h\right)^{2/3}I^{1/2}=499.8\mathrm{m}^3/\mathrm{s}$$

約 500m^3/s であることが分かり，得られた水深は正しいといえる。

7－2

予習

1.

$\frac{dz}{dx}$：河床勾配，　$\frac{dz}{dx}+\frac{dh}{dx}$ ：水面勾配，　$\frac{dz}{dx}+\frac{dh}{dx}+\frac{d}{dx}\left(\frac{U^2}{2g}\right)$ ：エネルギー勾配

2.

等流水深（式 7－24）　$h_0=\left(\frac{nq}{I_e^{1/2}}\right)^{3/5}$

限界水深（式 6－11）　$h_c = \left(\dfrac{q^2}{g}\right)^{1/3}$

上述の両式が釣り合うとき，等流水深に含まれるエネルギー勾配が限界勾配 I_c となる。

$$\left(\frac{nq}{I_c^{1/2}}\right)^{3/5} = \left(\frac{q^2}{g}\right)^{1/3}$$

上式を I_c について整理すると以下のようになる。

$$I_c = \frac{n^2 g^{10/9}}{q^{2/9}}$$

演習問題　A

7-2-A1

(1)限界水深は以下のように計算される。

限界水深　$h_c = \left(\dfrac{q^2}{g}\right)^{\frac{1}{3}} = \left(\dfrac{1.5^2}{9.8}\right)^{\frac{1}{3}} = 0.61\text{m}$

(2)

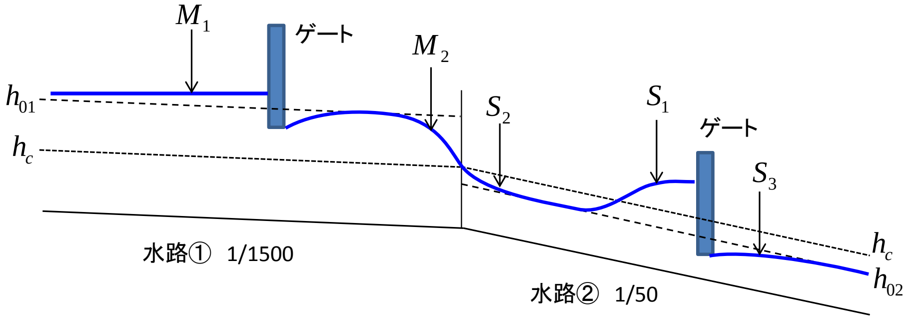
等流水深　$h_{01} = \left(\dfrac{qn}{I^{1/2}}\right)^{3/5} = \left(\dfrac{1.5\times 0.025}{\sqrt{1/1500}}\right)^{3/5} = 1.25\text{m}$

$$h_{02} = \left(\frac{qn}{I^{1/2}}\right)^{3/5} = \left(\frac{1.5\times 0.025}{\sqrt{1/50}}\right)^{3/5} = 0.45\text{m}$$

フルード数　$F_{r1} = \dfrac{1.2}{\sqrt{9.8\times 1.251}} = 0.34$

$$F_{r2} = \frac{3.326}{\sqrt{9.8\times 0.451}} = 1.58$$

(3) 水面形の概略図および曲線名は以下のようになる。



7-2-A2

(1)等流水深 h_{01}，h_{02}および限界水深 h_cは，以下のように算定される。

$$q = \frac{Q}{B} = \frac{300}{100} = 3.00\,\text{m}^2/\text{s}$$

$$h_{01} = \left(\frac{n^2 q^2}{I_{b1}}\right)^{3/10} = \left(\frac{0.02^2\times 3^2}{1/40}\right)^{3/10} = 0.559\text{ m}$$

$$h_{02} = \left(\frac{n^2 q^2}{I_{b2}}\right)^{3/10} = \left(\frac{0.02^2\times 3^2}{1/500}\right)^{3/10} = 1.19\text{ m}$$

$$h_c=\left(\frac{q^2}{g}\right)^{1/3}=\left(\frac{3^2}{9.8}\right)^{1/3}=0.972\ \mathrm{m}$$

(2) 水路Ｉの等流水深 h_{01} を用いて共役水深 h_2 を求める。

$$F_{r1}=\frac{q/h}{\sqrt{gh}}=\frac{3/0.559}{\sqrt{9.8\times0.559}}=2.29$$

$$h_2=\frac{h_{01}}{2}\left(-1+\sqrt{1+8F_{r1}^2}\right)=\frac{0.559}{2}\left(-1+\sqrt{1+8\times2.29^2}\right)=1.55\mathrm{m}$$

上式の結果から $h_2>h_{02}$ であるため，跳水は水路Ⅱ内で生じる。

演習問題　B

7-2-B1

式７－８５の下付き 1 に既知点である下流端断面の値を代入し，断面Ｂの初期仮定水深は下流端水深と同じ（$h_A=h_B=4.5$m）として計算を行ってみる.

収束確認　$\left|h_i-h_\mathrm{B}\right|=\left|4.30333-4.5\right|=0.19667>0.0001$

収束条件に収まらないため，仮定値を $h_B=h_i$ とし，繰り返し計算を進める。何回かの繰り返し計算の後，断面Ｂの水深は $h=4.303$m と算定される。同様に，断面Ｃ，断面Ｄの計算を行うと，断面Ｃは $h=3.550$m，断面 D は $h=2.417$m となる。水深は徐々に減少していくが，水位で考えれば，下流端で $H=4.8$m に対し，断面Ｂは $H=5.003$m，断面Ｃは $H=5.250$m，断面Ｄは $H=5.917$m となり，徐々に上昇することが分かる。計算された値を用いて水位，河床高の縦断図を描けば，より理解が深まる。

7-2-B2

式 7－85 の下付き 1 に既知点である下流端断面の値を代入し，断面Ｂの初期仮定水深は下流端水深と同じ（$h_A=h_B=4.5$m）として計算を行ってみる。

$$h_i=\left(h_\mathrm{A}+Z_\mathrm{A}-Z_\mathrm{B}\right)+\left(\frac{1}{2gA_\mathrm{A}^2}-\frac{1}{2gA_\mathrm{B}^2}\right)Q^2+\left(\frac{1}{K_\mathrm{A}^2}+\frac{1}{K_\mathrm{B}^2}\right)Q^2\frac{\Delta X}{2}$$

$$=\quad 4.1 \quad + \quad -0.02268 \quad + \quad 0.05754$$
$$=4.13486\ \mathrm{m}$$

収束確認　$\left|h_i-h_\mathrm{B}\right|=\left|4.13486-4.5\right|=0.36514>0.0001$

収束条件に収まらないため，仮定値を $h_B=h_i$ とし，繰り返し計算を進める。何回かの繰り返し計算の後，断面Ｂの水深は $h=4.135$m と算定される。同様に，断面Ｃ，断面Ｄの計算を行うと，断面Ｃは $h=3.227$m，断面Ｄは $h=2.099$m となる。水位は，下流端で $H=4.8$m に対し，断面Ｂは $H=4.835$m，断面Ｃは $H=4.927$m，断面Ｄは $H=5.599$m となり，断面Ｃまでは下流端からほとんど水位が変化せず，断面Ｄで大きく上昇することが分かる。

７－３

予習

１．

上流断面から流入する水の体積と，下流断面から流出する水の体積の差から，dx 区間内に貯留される水の体積を計算すると以下のようになる。

$$Qdt - \left(Qdt + \frac{\partial Q}{\partial x} dxdt \right) = -\frac{\partial Q}{\partial x} dxdt$$

また，dt 時間の体積変化量を，断面積 A を用いて表現すると以下のようになる。

$$\left(Adx + \frac{\partial A}{\partial t} dtdx \right) - Adx = \frac{\partial A}{\partial t} dtdx$$

上の 2 式は，質量保存則により等しいため，以下の関係が得られる。

$$-\frac{\partial Q}{\partial x} dxdt = \frac{\partial A}{\partial t} dtdx$$

上式を整理すると，以下に示す連続式が得られる。

$$\frac{\partial A}{\partial t} + \frac{\partial Q}{\partial x} = 0$$

２．

①式の右辺を変換し，連続式を代入すると以下のようになる。

$$\begin{aligned} \frac{\partial AU}{\partial t} + \frac{\partial QU}{\partial x} &= A\frac{\partial U}{\partial t} + U\frac{\partial A}{\partial t} + Q\frac{\partial U}{\partial x} + U\frac{\partial Q}{\partial x} \\ &= A\frac{\partial U}{\partial t} + Q\frac{\partial U}{\partial x} + U\left(\frac{\partial A}{\partial t} + \frac{\partial Q}{\partial x} \right) \\ &= A\frac{\partial U}{\partial t} + Q\frac{\partial U}{\partial x} \end{aligned}$$

以上より，②式が得られる。

$$A\frac{\partial U}{\partial t} + Q\frac{\partial U}{\partial x} = gAI_b - gA\frac{\partial h}{\partial x} - g\frac{n^2 U^2}{R^{1/3}} S$$

演習問題　Ａ

7-3-A1

連続式（式７－８９）を差分形式に変換する。

$$\frac{\partial Bh}{\partial t} + \frac{\partial Q}{\partial x} = 0 \quad \rightarrow \quad \frac{\Delta h}{\Delta t} = -\frac{1}{B}\frac{Q_2 - Q_1}{\Delta x}$$

ここに，Δt : 差分時間であり本問では 1 分間の事象を知りたいため 60 秒となる．上式にそれぞれの値を代入すると，水位変化量 Δh が求められる。

$$\Delta h = -\frac{\Delta t}{B}\frac{Q_2 - Q_1}{\Delta x} = -\frac{60}{30}\frac{200-250}{1000} = 0.1 \text{ m}$$

したがって，1 分間に 0.1m 上昇したことが分かる。

7-3-A2

平均流速を求める。

$$U = \frac{Q}{A} = \frac{1000}{450 \times 2.5} = 0.889 \text{ m/s}$$

シェジーの式による c/U の関係から，伝播速度を求めると以下のようになる。

$$c=\frac{3}{2}U=\frac{3}{2}\times 0.889=1.334\ \mathrm{m/s}$$

マニングの式による c/U の関係から，伝播速度を求めると以下のようになる。

$$c=\frac{5}{3}U=\frac{5}{3}\times 0.889=1.482\ \mathrm{m/s}$$

演習問題　B

7-3-B1

連続式（式 7－89）を差分形式に変換した式を利用する。

$$\frac{\partial Bh}{\partial t}+\frac{\partial Q}{\partial x}=0\ \rightarrow\ \frac{\Delta h}{\Delta t}=-\frac{1}{B}\frac{Q_d-Q_u}{\Delta x}$$

上式で Q_u は上流からの流入量，Q_d は下流への流出量，Δt は 3600 秒，$B\Delta x$ は貯水面積 150000m^2 である。0 時～1 時までの水位変化量 Δh を算定する。この 1 時間の流入・流出量の平均値は，

$$Q_u=\frac{250+400}{2}=325\ \mathrm{m^3/s}\ ,\quad Q_d=\frac{250+380}{2}=315\ \mathrm{m^3/s}$$

となる。水位変化量は，以下のように算定される。

$$\Delta h=-\frac{\Delta t}{B}\frac{Q_d-Q_u}{\Delta x}=-\frac{3600}{150000}(315-325)=0.24\ \mathrm{m}$$

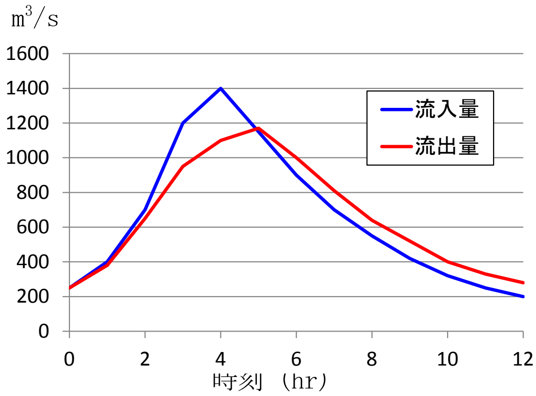
1 時の水位は，以下のようになる。

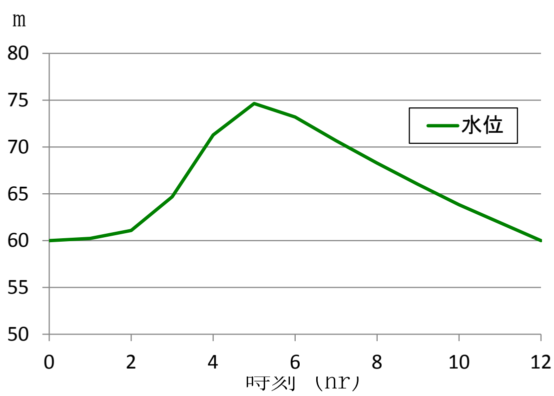
$$H^t=H^{t-\Delta t}+\Delta h=60+0.24=60.24\ \mathrm{m}$$

他の時刻の水位の計算結果は，以下の表のようになる。

時刻(hr)	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
流入量(m^3/s)	250	400	700	1200	1400	1150	900	700	550	420	320	250	200
流出量(m^3/s)	250	380	650	950	1100	1170	1000	810	640	520	400	330	280
水位変化量(m)		0.24	0.84	3.6	6.6	3.36	-1.44	-2.52	-2.4	-2.28	-2.16	-1.92	-1.92
水位(m)	60.00	60.24	61.08	64.68	71.28	74.64	73.20	70.68	68.28	66.00	63.84	61.92	60.00

計算結果をグラフで表すと，下図（右）のようになる。参考に，流入，流出の時間変化も示す。





7-3-B2

三角形断面の形状要素を現す式は，台形断面の形状要素式（式 7－30～式 7－33）の底面幅を b=0 とすればよい。

水面幅　　　$B = b + 2ah = 2ah$

潤辺　　　　$S = b + 2\sqrt{1+a^2}\,h = 2\sqrt{1+a^2}\,h$

流水断面積　$A = h(b + ah) = ah^2$

径深　　　　$R = A/S = ah\big/2\sqrt{1+a^2}$

任意断面に対する伝播速度 c と断面平均流速 U の関係を表す式７－１０５に，上記の各断面を表す式を代入すると，c/Uは以下のように算定される。

$$\frac{c}{U} = 1 + \frac{2}{3}\frac{A}{R}\frac{S - \frac{A}{B}\frac{dS}{dh}}{S^2}$$

$$= 1 + \frac{2}{3}\frac{ah^2}{ah\big/2\sqrt{1+a^2}}\frac{2\sqrt{1+a^2}\,h - \frac{ah^2}{2ah}\frac{d}{dh}\left(2\sqrt{1+a^2}\,h\right)}{\left(2\sqrt{1+a^2}\,h\right)^2}$$

$$= 1 + \frac{2}{3}2h\sqrt{1+a^2}\,\frac{2\sqrt{1+a^2}\,h - \frac{h}{2}\times 2\sqrt{1+a^2}}{4\left(1+a^2\right)h^2}$$

$$= 1 + \frac{2}{3}\frac{2}{4} = \frac{4}{3}$$

＝4:3