８章　ＷｅｂにＬｉｎｋ解説

乱流境界層について（p. 220）

ここでは乱流境界層の基本的事項について説明する。なお，議論は本文の図 8.5 に示す薄い板を対象として行う。まず乱流境界層の特徴として下記が挙げられる。

1. 境界層が層流境界層に比べて厚く，また流下方向（x 方向）に行くにつれより速く厚くなる。
2. 速度勾配が大きいために摩擦抵抗が大きい。
3. 境界層の内部は乱流状態である。つまり，せん断力は粘性応力とレイノルズ応力の和である（通常はレイノルズ応力の方が圧倒的に大きいとして粘性応力を無視する）。ただし，壁面のごく近くでは粘性底層が存在し，せん断力は粘性応力のみとなる。

乱流は理論的に扱うことが容易でなく，乱流境界層の厚さ，摩擦抵抗を評価するにあたっては，管路の場合と同様に理論的によく分からない部分は実験結果等から補う。

まず乱流境界層の厚さを求める。図 8.5 では平板の前縁の近くで層流境界層が現れるとしているが，粗度をつけるなどにより前縁から乱流境界層を作り出すことができる。そこで，前縁から乱流境界層が現れるとして議論する。

乱流境界層の厚さδ を代表的な長さとして採用した時のレイノルズ数 $R_{e\delta}$が 50,000 以下であれば，δ と時間平均の速度 u の間には以下のような関係があることが実験から明らかになっている。

$$\frac{u}{U}=\left(\frac{y}{\delta}\right)^{1/7} \quad \text{(W-1)}$$

ここに，U は境界層の外側の流れの流速であり，y 方向に一様としている。また，せん断力 τ_0 は管路での取り扱いと同様，式(W-2) のように U の 2 乗に比例するとすると，この場合の f は実験から式(W-3)のようになることが知られている。

$$\tau_0=\frac{f}{8}\rho U^2 \quad \text{(W-2)}$$

$$f=0.18R_{e\delta}^{\;-1/4} \quad \text{(W-3)}$$

これらから分かることは，流速とせん断力が乱流境界層の厚さδの関数として表されるということである。そこで，運動方程式にこれらを代入し，δについて解けば乱流境界層の厚さが計算できると考えられる。ただし，ここで使う運動方程式は残念ながら本書で学んだオイラーの運動方程式ではない。なぜならオイラーの運動方程式にはせん断力の項が含まれないからである。ここではせん断力の項を含むナビエ・ストークス方程式（Navier - Stokes 方程式）を用いる。

ナビエ・ストークス式はそのままで取り扱いが難しいが，境界層内については式形が式(W-4)のように簡単になる。

$$\frac{d}{dx}\left(\rho U^2\theta\right)=\frac{dp}{dx}\delta^* + \mu\left.\frac{\partial u}{\partial y}\right|_{y=0} \quad \cdots\cdots \text{(W-4)}$$

ここにθ は運動量厚，δ*は排除厚と呼ばれ，それぞれ以下のように定義される。

$$\theta = \int_0^\delta \left(1-\frac{u}{U}\right)\frac{u}{U}dy \quad \cdots\cdots \text{(W-5)}$$

$$\delta^* = \int_0^\delta \left(1-\frac{u}{U}\right)dy \quad \cdots\cdots \text{(W-6)}$$

式(W-4)を一般にフォン・カルマン（Von Karman）の運動方程式と呼ぶ。フォン・カルマンの運動方程式に式(W-2)，(W-3)を代入して整理すると

$$\frac{d\delta}{dx} = 0.231\left(\frac{\nu}{U\delta}\right)^{1/4} \quad \cdots\cdots \text{(W-7)}$$

となる。さらに $x = 0$ から乱流境界層であると仮定して積分すると乱流境界層の厚さδ は下式で表される。

$$\delta = 0.37\left(\frac{\nu}{U}\right)^{1/5} x^{4/5} \quad \cdots\cdots \text{(W-8)}$$

摩擦抵抗については上の結果を用いればよく，つまり x 方向に長さ l の平板の片側に作用する摩擦抵抗 D_f は

$$D_f = \int_0^l \tau_0 dx = \int_0^l \frac{f}{8}\rho U^2 dx = \int_0^l \frac{0.18}{8}\left(\frac{\nu}{U\delta}\right)^{1/4}\rho U^2 dx = 0.036\rho U^{9/5}\nu^{1/5}l^{4/5} \quad \cdots\cdots \text{(W-9)}$$

となる。なお摩擦抵抗（奥行き方向に単位長さあたりとする）を

$$D_f = \frac{C_f}{2}\rho U^2 l \quad \cdots\cdots \text{(W-10)}$$

の形式で示す場合，C_f は

$$C_f = 0.072\left(\frac{Ul}{\nu}\right)^{-1/5} \quad \cdots\cdots \text{(W-11)}$$

となる。

レイノルズ数 $R_{e\delta}$が 50,000 より大きくなると上記の理論では説明ができず，別の表現が必要となる。詳細は境界層理論に関する書物を参考されたい。

圧力方程式の導出（p. 228）

圧力方程式はベルヌーイの定理を非定常流れにも適用できるよう拡張したものである。導出方法としては，質点の力学でニュートンの運動方程式を出発点として（積分して）エネルギー保存則を導いたのと同様である。運動方程式としてオイラーの運動方程式を用いる点が異なる。なお，議論展開は xyz 直角座標系で行う（z 軸は鉛直上向きにとる）。同式は 3 章でも取り扱っているが，ベクトル解析の記法を用いて表現すると下式のようになる。

$$\frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial t}+(\boldsymbol{u}\cdot\mathrm{grad})\boldsymbol{u}=\boldsymbol{F}-\frac{1}{\rho}\mathrm{grad}\,p \quad\cdots\text{①}$$

ここで $\boldsymbol{F}$ は外力，grad は式②で定義されるベクトル演算子である。

$$\mathrm{grad}=\left(\frac{\partial}{\partial x},\frac{\partial}{\partial y},\frac{\partial}{\partial z}\right) \quad\cdots\text{②}$$

外力として重力のみを考えると，$\boldsymbol{F}$ は重力ポテンシャル $\Pi = gz$ を用いて式③で表すことができる。

$$\boldsymbol{F}=(0,0,-g)=-\mathrm{grad}\,\Pi \quad\cdots\text{③}$$

また，流れを渦なしと仮定して流速ベクトル $\boldsymbol{u}$ を速度ポテンシャル ϕ で表すと式①は下式のように表される。

$$\mathrm{grad}\frac{\partial \phi}{\partial t}+(\boldsymbol{u}\cdot\mathrm{grad})\boldsymbol{u}=-\mathrm{grad}\,\Pi-\frac{1}{\rho}\mathrm{grad}\,p \quad\cdots\text{④}$$

式④では左辺第 2 項を除き grad(…)という形式となっている。左辺第 2 項が grad(…)という形式で表現できればより簡潔に整理できそうである。そこで

$$(\boldsymbol{u}\cdot\mathrm{grad})\boldsymbol{u}=\frac{1}{2}\mathrm{grad}(\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{u})-\boldsymbol{u}\times\mathrm{rot}\,\boldsymbol{u} \quad\cdots\text{⑤}$$

というベクトル解析の定理を使う。式⑤では右辺第 2 項が余計であるが，今は渦なしを仮定しているので $\boldsymbol{\omega}=\mathrm{rot}\,\boldsymbol{u}=0$ となり上手い具合に消える。よって式④は $\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{u}=u^2+v^2+w^2=q^2$ と置くと

$$\mathrm{grad}\left(\frac{\partial \phi}{\partial t}+\frac{q^2}{2}+\Pi+\frac{p}{\rho}\right)=0 \quad\cdots\text{⑥}$$

となり，直ちに

$$\frac{\partial \phi}{\partial t}+\frac{q^2}{2}+gz+\frac{p}{\rho}=f(t) \quad\cdots\text{⑦}$$

が得られる。$f(t)$は時間 t の任意関数である。時間 t を x，y，z のいずれで微分しても 0 となるため式⑦を式⑥に変形できることは容易に確かめられる。式⑦が**圧力方程式**（あるいは一般化したベルヌーイの定理）である。