## ９章　ＷｅｂにＬｉｎｋ解説

### 速度ポテンシャルの導出（p.240）

微小振幅波理論の基礎方程式と境界条件

$$\nabla^2\phi = \frac{\partial^2\phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\phi}{\partial z^2} = 0 \quad \cdots(1) \qquad \text{連続式}$$

$$\frac{\partial\phi}{\partial t} + \frac{p}{\rho} + gz = 0 \quad \cdots(2) \qquad \text{運動方程式}$$

$$\frac{\partial\phi}{\partial t} + g\eta = 0 \quad (z = \eta) \quad \cdots(3) \qquad \text{水面での力学的境界条件}$$

$$\frac{\partial\eta}{\partial t} = w \quad (z = \eta) \quad \cdots(4) \qquad \text{水面での運動学的境界条件}$$

$$w = 0 \quad (z = -h) \quad \cdots(5) \qquad \text{水底での運動学的境界条件}$$

速度ポテンシャルの導出

仮定(5)より，水面波形$\eta(x,t)$を次式のように与える。

$$\eta(x,t) = \frac{H}{2}\cos(kx - \omega t)$$

ここで，$H$：波高，$k$：波数，$\omega$：角周波数である。

速度ポテンシャル$\phi(x,z,t)$は，水面波形$\eta$と同様に水平方向$x$と時間方向$t$に関しては周期的であり，鉛直方向$z$にも変化すると考えて，以下のように仮定する。

$$\phi(x,z,t) = Z(z)\cdot\sin(kx - \omega t)$$

この式を連続式(1)に代入する。

$$\begin{aligned}
\nabla^2\phi = \nabla\cdot\nabla\phi &= \left(\frac{\partial}{\partial x}\vec{\imath} + \frac{\partial}{\partial z}\vec{k}\right)\cdot\left(\frac{\partial\phi}{\partial x}\vec{\imath} + \frac{\partial\phi}{\partial z}\vec{k}\right) = \frac{\partial^2\phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\phi}{\partial z^2} \\
&= \frac{\partial^2}{\partial x^2}\{Z(z)\cdot\sin(kx-\omega t)\} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}\{Z(z)\cdot\sin(kx-\omega t)\} \\
&= Z(z)\cdot\{-k^2\sin(kx-\omega t)\} + \frac{d^2Z(z)}{dz^2}\sin(kx-\omega t) \\
&= \sin(kx-\omega t)\left(\frac{d^2Z(z)}{dz^2} - k^2Z(z)\right) = 0
\end{aligned}$$

よって，

$$\frac{d^2Z(z)}{dz^2} - k^2Z(z) = 0$$

となる。ここで，常微分方程式の形から解を$Z(z) = e^{pz}$（$p$：未知定数）と仮定する。これを上式に代入すると，

$$p^2e^{pz} - k^2e^{pz} = (p^2 - k^2)e^{pz} = 0$$

$$p = \pm k$$

となる。よって，上記の常微分方程式の解は，

$$Z(z) = e^{kz} \quad \text{および} \quad Z(z) = e^{-kz}$$

である。したがって，一般解は次式である。

$$Z(z) = Ae^{kz} + Be^{-kz}$$

ここで，$A$，$B$は任意定数である。また，速度ポテンシャル$\phi(x,z,t)$は次式で表される。

$$\phi(x,z,t) = (Ae^{kz} + Be^{-kz})\sin(kx - \omega t)$$

次いで，境界条件を用いて，$A$，$B$を求める。水底での運動学的境界条件(5)を用いると，

$$w = \frac{\partial \phi}{\partial z} = k(Ae^{kz} - Be^{-kz})\sin(kx - \omega t)$$

より，$z = -h$ で$w = 0$ より

$$w = k\left(Ae^{k(-h)} - Be^{kh}\right)\sin(kx - \omega t) = 0$$

$$Ae^{-kh} - Be^{kh} = 0$$

$$A = Be^{2kh}$$

となる。したがって，

$$\begin{aligned}\phi(x,z,t) &= (Be^{2kh}e^{kz} + Be^{-kz})\sin(kx - \omega t)\\ &= Be^{kh}(e^{kh}e^{kz} + e^{-kh}e^{-kz})\sin(kx - \omega t)\\ &= Be^{kh}\left(e^{k(h+z)} + e^{-k(h+z)}\right)\sin(kx - \omega t\ )\\ &= Be^{kh} \cdot 2\cosh k(h+z)\sin(kx - \omega t) \qquad \left(\text{参考} \quad \cosh\theta = \frac{1}{2}\left(e^{\theta} + e^{-\theta}\right)\right)\end{aligned}$$

水面での力学的境界条件(3)より，

$$\begin{aligned}\eta(x,t) = \left(-\frac{1}{g}\frac{\partial \phi}{\partial t}\right)_{z=0} &= \left\{-\frac{1}{g} \cdot 2Be^{kh}\cosh k(h+z) \cdot (-\omega)\cos(kx - \omega t)\right\}_{z=0}\\ &= \frac{H}{2}\cos(kx - \omega t)\end{aligned}$$

よって，

$$2Be^{kh} = \frac{Hg}{2\omega\cosh kh}$$

したがって，

$$\phi(x,z,t) = \frac{Hg}{2\omega}\frac{\cosh k(h+z)}{\cosh kh} \cdot \sin(kx - \omega t)$$

**テイラー展開（p.244）**

1 変数でのテイラー展開は,

$$f(x+\mathit{\Delta} x)=f(x)+\frac{\Delta x}{1!}f'(x)+\frac{(\Delta x)^2}{2!}f''(x)+\frac{(\Delta x)^3}{3!}f^{(3)}(x)+\cdots$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(\Delta x)^n}{n!}\frac{d^n f(x)}{dx^n}$$

2 変数でのテイラー展開は,

$$f(x+\Delta x,y+\Delta y)=f(x,y)+\frac{1}{1!}\left(\Delta x\frac{\partial}{\partial x}+\Delta y\frac{\partial}{\partial y}\right)f(x,y)$$

$$+\frac{1}{2!}\left(\Delta x\frac{\partial}{\partial x}+\Delta y\frac{\partial}{\partial y}\right)^2 f(x,y)+\frac{1}{3!}\left(\Delta x\frac{\partial}{\partial x}+\Delta y\frac{\partial}{\partial y}\right)^3 f(x,y)+\cdots$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\left(\Delta x\frac{\partial}{\partial x}+\Delta y\frac{\partial}{\partial y}\right)^n f(x,y)$$

したがって,

$$\phi(x,z,t)=\phi(x_0+\xi,z_0+\zeta,t)$$

$$=\phi(x_0,z_0,t)+\frac{1}{1!}\left(\xi\frac{\partial}{\partial x}+\zeta\frac{\partial}{\partial z}\right)\phi(x_0,z_0,t)+\frac{1}{2!}\left(\xi\frac{\partial}{\partial x}+\zeta\frac{\partial}{\partial z}\right)^2\phi(x_0,z_0,t)+\cdots$$

と書くことができる。