９章　問題解答

９－１
予習
１．

(1)～(3)　sin関数は奇関数，cos関数は偶関数，tan関数は奇関数である。

（参考)：奇関数とは，…　グラフがy 軸に関して線対称になる関数

偶関数とは，…　グラフが原点に関して，点対称になる関数

(4)

$$\sin\left(\theta+\frac{\pi}{2}\right)=\sin\theta\cdot\cos\frac{\pi}{2}+\cos\theta\cdot\sin\frac{\pi}{2}=\cos\theta$$

(5)

$$\cos\left(\theta+\frac{\pi}{2}\right)=\cos\theta\cdot\cos\frac{\pi}{2}-\sin\theta\cdot\sin\frac{\pi}{2}=-\sin\theta$$

(6)

$$\tan(\theta+n\pi)=\frac{\tan\theta\cdot\tan n\pi}{1-\tan\theta\cdot\tan n\pi}=\tan\theta$$

演習問題　A
9-1-A1

(1）波高 1.0，周期 15，波長 100　　(2）波高 0.1，周期 1.0，波長 2.0

(3）波高 1.0，周期 15，波長 100　　(4）波高 0.05，周期 2.0，波長 4.0

9-1-A2

周期 $T=4.0\mathrm{s}$，波長 $L=25\mathrm{m}$より，波数$k=2\pi/L=0.25\ \mathrm{m}^{-1}$，周波数 $f=1/T=0.25\ \mathrm{Hz}$，角周波数 $\omega=2\pi f=2\pi/T=1.57\ \mathrm{rad/s}$

9-1-A3

水深$h=10\mathrm{cm}$，波長$L=6\mathrm{cm}$，波高$H=1\mathrm{cm}$より，相対水深$h/L=10/6=1.67$，相対波高$H/h=1/10=0.1$，波形勾配$H/L=1/6=0.167$

$h/L=1.67>1/2$より，この波は深水波に分類される。

演習問題　B
9-1-B1

(a）図は横軸がx，縦軸がz の空間波形を示している。

したがって，波高$H=0.8\ \mathrm{m}$，波長$L=13\ \mathrm{m}$，波数$k=2\pi/L=0.48\ \mathrm{m}^{-1}$

空間波形であるため，時間情報である周期T，周波数f は求められない。

(b）図は横軸がt，縦軸がz の時間波形を示している。

したがって，$H=0.16\ \mathrm{m}$，$T=4.0\mathrm{s}/3$ 波 $=1.33\ \mathrm{s}$，$f=1/T=0.75\ \mathrm{Hz}$

時間波形であるため，空間情報である波長L，波数k は求められない。

9-1-B2

$T = 5.0$ s，$L = 25$ m，$h = 3.0$ m

水深による波の分類では，相対水深h/Lが指標となる。いま，$h/L = 3.0/25 = 0.12$より，

$$1/20 < h/L < 1/2$$

である。したがって，この波は浅水波である。また，この波の進む速度（波速）は，

$$C = L/T = 25/5.0 = 5.0\ \mathrm{m/s}$$

である。

9-1-B3

① 周期（または波長）　② 規則波　③ 不規則波　④ 相対水深

⑤ 極浅水波（または長波）　⑥ 波形勾配　⑦相対波高

⑧ 微小　⑨ 有限

９－２

予習

１.

（1）$(\sin\theta)' = \cos\theta$　（2）$(\cos\theta)' = -\sin\theta$　（3）$\left(e^{\theta}\right)' = e^{\theta}$

（4）$\left(e^{-2\theta}\right)' = -2e^{-2\theta}$　（5）$(\sinh\theta)' = \cosh\theta$　（6）$(\cosh\theta)' = \sinh\theta$

演習問題　Ａ

9-2-A1

計測された $T = 5.0$ s の波を深水波と仮定して，その沖波波長（深水域での波長）を求めると，

$$L_0 = 1.56T^2 = 39\ \mathrm{m}$$

となる。したがって，$h = 150$ m 地点でのこの波の相対水深は，

$$h/L_0 = 150/39 > 1/2$$

となり，深水波であることが確認できた*。よって，波長と波速は，

$$L_0 = 39\ \mathrm{m},\ C_0 = 1.56T = 7.8\ \mathrm{m/s}$$

*　ここで，$h/L > 1/2$を満足しない場合は，深水波の仮定が間違っていたことになる。その場合は，例題 9-3-2 のように分散関係式（または，それをLについて変形した式）を用いて，繰り返し計算等によって，Lを求める必要がある。

9-2-A2

$h = 0.5$ m，$H = 0.04$ m，$T = 1.0$ s，$L = 1.5$ m より，

$$\omega = 2\pi/T = 6.28\ \mathrm{rad/s},\ kh = 2\pi h/L = 2.09$$

ここで，$\cos(kx - \omega t)$，$\sin(kx - \omega t)$は最小値－1 から最大値 1 の範囲で変化することを考慮すると，式 9-31 より水平方向流速の振幅（最大値）u_{max}は，

$$u_{max} = \frac{H\omega}{2} \cdot \frac{\cosh k(h+z)}{\sinh kh}$$

と表される。したがって，水面（$z = 0$）では，

$$u_{max} = \frac{H\omega}{2} \cdot \frac{\cosh k(h+0)}{\sinh kh} = \frac{0.04 \times 6.28}{2} \cdot \frac{\cosh(2.09)}{\sinh(2.09)} = 0.13\ \ \mathrm{m/s}$$

水底（$z = -h$）では，

$$u_{max} = \frac{H\omega}{2} \cdot \frac{\cosh k(h-h)}{\sinh kh} = \frac{0.04 \times 6.28}{2} \cdot \frac{\cosh(0)}{\sinh(2.09)} = 0.032\ \ \mathrm{m/s}$$

である。

9-2-A3

前問と同様に，式 9-32 より鉛直方向流速の振幅（最大値）w_{max}は，

$$w_{max} = \frac{H\omega}{2} \cdot \frac{\sinh k(h+z)}{\sinh kh}$$

と表される。したがって，水面（$z = 0$）では，

$$w_{max} = \frac{H\omega}{2} \cdot \frac{\sinh k(h+0)}{\sinh kh} = \frac{0.04 \times 6.28}{2} \cdot \frac{\sinh(2.09)}{\sinh(2.09)} = 0.13\ \ \mathrm{m/s}$$

水底（$z = -h$）では，

$$w_{max} = \frac{H\omega}{2} \cdot \frac{\sinh k(h-h)}{\sinh kh} = \frac{0.04 \times 6.28}{2} \cdot \frac{\sinh(0)}{\sinh(2.09)} = 0.00\ \ \mathrm{m/s}$$

である。

演習問題　B

9-2-B1

分散関係式$\omega^2 = gk \tanh kh$ から，波数k を解析的に求めることは困難である。したがって，以下のように変形し，k について繰り返し計算を行うことでk の値を求める。

$$k' = \frac{\omega^2}{g \tanh kh} = \frac{(2\pi/T)^2}{g \tanh kh} \quad \cdots \text{(i)}$$

$h = 1.5$ m，$T = 1.0$ s および初期値として$k = 1$ を代入すると，

$$k' = \frac{(2 \times 3.14/1.0)^2}{9.8 \times \tanh(1.0 \times 1.5)} = 4.45$$

となる。しかし$k' \neq k$なので，$k' = 4.45$を新しい k の値として，再度式(i)に代入すると，

$$k' = \frac{(2 \times 3.14/1.0)^2}{9.8 \times \tanh(4.45 \times 1.5)} = 4.03 \neq k$$

となる。再度，$k' = 4.03$を新しい k の値として，同様の計算を行うと$k' = 4.03 = k$ となり，式(i)を満足するk の値が得られた。したがって，この波の波長 L は，

$$L = 2\pi/k = 1.56\ \ \mathrm{m}$$

と求まる。

9-2-B2

津波は沖合においても長波として扱うことが可能であるため，その波速 C は，

$$C = \sqrt{gh} = \sqrt{9.8 \times 50} = 22.1\ \ \mathrm{m/s}$$

したがって，20km 沖合で計測された津波が，岸に到達するまでの時間 t は，

$$t = \frac{20 \times 10^3\ \ \mathrm{m}}{22.1\ \ \mathrm{m/s}} = 905\ \mathrm{s} \quad \text{（約 15 分）}$$

である。

9-2-B3

式 9-39 より，

$$A=\frac{H}{2}\cdot\frac{\cosh k(h+z_0)}{\sinh kh}=\frac{H}{2}\cdot\frac{e^{k(h+z_0)}+e^{-k(h+z_0)}}{2}\frac{2}{e^{kh}-e^{-kh}}=\frac{H}{2}\cdot\frac{e^{kz_0}(e^{kh}+e^{-kh})}{e^{kh}-e^{-kh}}$$

同様に，

$$B=\frac{H}{2}\cdot\frac{\sinh k(h+z_0)}{\sinh kh}=\frac{H}{2}\cdot\frac{e^{kz_0}(e^{kh}-e^{-kh})}{e^{kh}-e^{-kh}}=\frac{H}{2}\cdot e^{kz_0}$$

深水波なので，h が非常に大きい，つまり $kh\to\infty$ を考えると，

$$e^{-kh}=\frac{1}{e^{kh}}\to 0$$

である。したがって，

$$A=\frac{H}{2}\cdot e^{kz_0}\cdot\frac{e^{kh}+e^{-kh}}{e^{kh}-e^{-kh}}\to\frac{H}{2}\cdot e^{kz_0}=B$$

となる。よって，水粒子運動は $A=B$ の円運動となる。

９－３

予習

１．

地面の位置を高さの基準（$z=0$）として，高さ 10m の位置での力学的エネルギーと，地面に衝突する直前（$z=0$）での力学的エネルギーの保存を考えると，

$$\left(\frac{1}{2}mv^2+mgz\right)_{z=10}=\left(\frac{1}{2}mv^2+mgz\right)_{z=0}$$

$z=10$ の位置では，最初，物体は静止しており（$v=0$），その後落下する。したがって，

$$0+0.05\times 9.8\times 10=\frac{1}{2}\times 0.05\times v^2+0$$

よって，地面に衝突する直前の物体の速度 v は，

$$v=\sqrt{2\times 9.8\times 10}=14.0\ \text{m/s}$$

演習問題　Ａ

9-3-A1

①　波高	②　平均	③　N/m（または，$\mathrm{N\cdot m/m^2}$）
④　群速度	⑤　$E\cdot C_g$	

9-3-A2

$$\text{位置エネルギー：}E_p=\frac{1}{16}\rho gH^2=\frac{1}{16}\times 1000\times 9.8\times 0.03^2=0.55\ \text{N/m}$$

$$\text{運動エネルギー：}E_k=E_p=0.55\ \text{N/m}$$

$$\text{全エネルギー：}E=E_p+E_k=0.55+0.55=1.1\ \text{N/m}$$

（ $E=(1/8)\rho gH^2$ を用いて求めてもよい。）

9-3-A3

深水波なので，$n = 0.5$，$C = 1.56T = 1.56 \times 0.5 = 0.78\ \mathrm{m/s}$
したがって，$C_g = n \cdot C = 0.5 \times 0.78 = 0.39\ \mathrm{m/s}$

演習問題　B

9-3-B1

$h = 50\ \mathrm{m}$，$H = 0.5\ \mathrm{m}$，$T = 10\ \mathrm{s}$
この波の沖波波長は，$L_0 = 1.56T^2 = 156\ \mathrm{m}$。
したがって，$h/L_0 = 50/156 < 1/2$ より，この波は浅水波であると考えられる。
分散関係式 $\omega^2 = gk \tanh kh$ より，

$$k' = \frac{(2\pi/T)^2}{g \tanh kh}$$

とし，この式を用いた繰り返し計算によって，分散関係式を満足するk を求める（くわしい計算方法は，演習問題 9-2-B1 を参照のこと）。

$k = 2\pi/L_0 \fallingdotseq 0.040$ を初期値として繰り返し計算を行うと，$k = 0.042\ \mathrm{m}^{-1}$，$L = 151\ \mathrm{m}$ が求まる。したがって，

$$n = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{2kh}{\sinh 2kh}\right) = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{2 \times 0.042 \times 50}{\sinh(2 \times 0.042 \times 50)}\right) = 0.563$$

$$C = \frac{gT}{2\pi} \tanh kh = \frac{9.8 \times 10}{2 \times 3.14} \cdot \tanh(0.042 \times 50) = 15.1\ \mathrm{m/s}$$

$$E = \frac{1}{8}\rho g H^2 = \frac{1}{8} \times 1000 \times 9.8 \times 0.5^2 = 306.25\ \mathrm{N/m}$$

よって，

$$W = E \cdot n \cdot C = 306.25 \times 0.563 \times 15.1 = 2603\ \ \mathrm{W/(m{\cdot}s)}$$

9-3-B2

$h_1 = 150\ \mathrm{m}$，$H_1 = 1.2\ \mathrm{m}$，$H_2 = 2.0\ \mathrm{m}$
式 9-56 より，

$$\frac{H_2}{H_1} = \left(\frac{h_1}{h_2}\right)^{1/4}$$

したがって，

$$h_2 = h_1 \left(\frac{H_1}{H_2}\right)^4 = 150 \times \left(\frac{1.2}{2.0}\right)^4 = 19.4\ \ \mathrm{m}$$

9-3-B3

$$n = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{2kh}{\sinh 2kh}\right)$$

ここで$kh \to \infty$（深水域）のとき，$2kh \to \infty$，$\sinh 2kh \to \infty$である。ここで，hの増加に伴う$2kh$ と $\sinh 2kh$ の増加率を比較すると，明らかに$2kh \ll \sinh 2kh$ である。
よって，

$$kh \to \infty \text{のとき，} \frac{2kh}{\sinh 2kh} \to 0$$

したがって，深水域では，

$$n = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{2kh}{\sinh 2kh}\right) = \frac{1}{2}(1 + 0) = 0.5$$

となる。

一方，$kh \to 0$ （極浅水域）のとき，$2kh \to 0$ ，$\sinh 2kh = (e^{2kh} - e^{-2kh})/2 \to 0$ である。また，khが0 に近づくにつれて，$\sinh 2kh$ は$2kh$ に漸近し，

$$\frac{2kh}{sinh\, 2kh} \fallingdotseq \frac{2kh}{2kh} = 1$$

となる。したがって，極浅水域では，

$$n = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{2kh}{\sinh 2kh}\right) = \frac{1}{2}(1 + 1) = 1.0$$

となる。