工業力学　第１２章

演習問題Ａの解答

12-A1　図アのように，滑らかな床の上を質量が無視できるばねで連結された 4 つの質点 m_1=1kg, m_2=2kg, m_3=1kg, m_4=2kg が x 軸上を運動している。ある瞬間のそれぞれの速度が, v_1=1m/s, v_2=−1m/s, v_3=1m/s，v_4=−1m/s であり，別の瞬間に，m_1，m_2，m_3 が停止していた。この瞬間の m_4 の速度 v_4' を求めよ。

解）式 12-12 に示す全運動量保存の式より，

$$m_1v_1 + m_2v_2 + m_3v_3 + m_4v_4 = m_1{v_1}' + m_2{v_2}' + m_3{v_3}' + m_4{v_4}'$$

が成り立つ。${v_1}' = {v_2}' = {v_3}' = 0$ として

$${v_4}' = \frac{m_1v_1+m_2v_2+m_3v_3+m_4v_4}{m_4} = \frac{1\times1+2\times(-1)+1\times1+2\times(-1)}{2} = -1 \text{ m/s}$$

となる。

12-A2　x-y 平面上の x=0，y=1m で，v_x=−1m/s，v_y=0 である質量 m=1kg が, 原点まわりで有する角運動量を求めよ。

解）式 12-16 における L_z を求めることにあてはまるので,

$$L_z = 0\times1\times0 - 1\times1\times(-1) = 1 \text{ kg·m}^2\text{/s}$$

となる。

12-A3　滑らかな床面上をひもにつながれて円運動している 2 つの質量 m_1=2kg，m_2=3kg を考える。2 つの質量が衝突する前，それぞれ v_1=2m/s，v_2=1m/s で半径 1m の等速円運動していた。衝突後は一体となって運動したとき，衝突後の速さを求めよ。

解）衝突後の速度をv'，円運動の半径を r とすると，角運動量保存の法則（式 12-21）より，

$$r(m_1v_1 + m_2v_2) = r(m_1 + m_2)v'$$

である。よって

$$v' = \frac{m_1v_1+m_2v_2}{m_1+m_2} = \frac{2\times2+3\times1}{2+3} = 1.4 \text{ m/s}$$

となる。

演習問題Ｂの解答

12-B1　ベルトコンベアが一定速度 v [m/s]で動いている。この上に毎秒 m_s [kg/s]の割合で，砂が落ちている。このような連続運搬を続けるために必要なベルトコンベアを引く力の大きさを求めよ。

解）時間 t_s[s]の間に m_st_s[kg]の砂がベルトコンベアの上に落ち，速度 v で動き出すと考える。このとき砂が得る運動量は，$m_st_s\cdot v$ となる。この運動量を得るためには，コンベアに同じ大きさの力積を与えればよいので，コンベアを引く力は,

$$\frac{m_st_sv}{t_s} = m_sv \text{ [N]}$$

と求まる。

12-B2　燃料を満載した質量 M [kg]のロケットが打ち上げられる。打ち上げの瞬間を迎えて，質量 m[kg]の燃料を速さ v[m/s]で噴射する反動で，ロケットがリフトオフした。このときのロケットの速度を求めよ。

解）時刻 t におけるロケットの質量を $M_r(t)$，速度を $V_r(t)$ で表すと，時刻 $t+dt$ におけるロケットの質量は $M_r(t+dt)=M_r(t)-mdt$，速度は $V_r(t+dt)$ となる。時刻 t から $t+dt$ の間に噴射された燃料の質量は mdt で，静止系からみた燃料の速度は $V_r(t)-v$ である。時刻 t と $t+dt$ の間で成り立つ運動量の変化 $dP(t)$ は，

$$dP(t) = \{M_r(t) - mdt\}V_r(t + dt) + mdt\{V_r(t) - v\} - M_r(t)V_r(t) \qquad ①$$

である。この運動量の変化の割合は，上昇するロケットに作用する重力に等しいので，

$$\frac{dP(t)}{dt} = -M_r(t)g \qquad ②$$

が成り立つ。ここで，$V_r(t+dt)$についてテイラー展開すると，$V_r(t+dt) = V_r(t) + (dV_r/dt)dt$である。これを式①に代入し$(dt)^2$ の項を無視すると，式②は

$$M_r(t)\frac{dV_r}{dt}dt - mvdt = -M_r(t)gdt \qquad ③$$

よって，$M_r(t) = M - mt$ であるので加速度は,

$$\frac{dV_r}{dt} = \frac{mv}{M-mt} - g \qquad ④$$

となる。式④の両辺を積分すると,

$$V_r = -v\log_e(M - mt) + C - gt \qquad (C\text{ は積分時定数}) \qquad ⑤$$

となる。初期条件として，$t = 0$ のとき　$V_r = 0$ と仮定すると，$C = v\log_e M$　となる。よってロケットの速度は,

$$V_r(t) = v\log_e\left(\frac{M}{M-mt}\right) - gt \qquad ⑥$$

となる。

12-B3　線密度が 0.2kg/m（1m あたり 0.2kg であること）である全長 0.6m のくさりの一部が，図イのように机からたれ下がっている。これをすべてもち上げるために必要な仕事を求めよ。ただし，重力加速度を 9.8m/s^2 とする。

解）全長が垂れ下がっているときのくさりの最上端を x 座標の原点にとる。x だけくさりを引いたときの力を F とすると，たれさがっている部分の長さが 0.6− x であるから,

$$F = 0.2 \times 9.8 \times (0.6 - x)$$

となる。ここから，微小長さ dx だけ引くときに必要な仕事 dW は,

$$dW = Fdx = 0.2 \times 9.8 \times (0.6 - x)dx$$

となるから，くさりのすべてを持ち上げるために必要な仕事は,

$$W = \int_0^{0.6} Fdx = 0.2 \times 9.8 \times \int_0^{0.6}(0.6 - x)dx = 0.2 \times 9.8 \times \left[0.6x - \frac{1}{2}x^2\right]_0^{0.6} \cong 0.35 \text{ J}$$

となる。