工業力学　Let's Try!

12 章

１）*2 について

任意の時刻 t における質点の座標を $r(x,y,z)$，速度を $v(v_x,v_y,v_z)$，運動量を P（P_x,P_y,P_z），そして角運動量を L（L_x,L_y,L_z）とすと，ベクトルの外積を求めると，

$$\boldsymbol{L}=\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{P}=\boldsymbol{r}\times m\boldsymbol{v}=(x,y,z)\times(mv_x,mv_y,mv_z)$$
$$=(y\cdot mv_z-z\cdot mv_y,z\cdot mv_x-x\cdot mv_z,x\cdot mv_y-y\cdot mv_x)=(L_x,L_y,L_z)$$

と求まる。

２）*3 について

式 12-2 において，質点 m_i に関する式の両辺に，位置ベクトル $\boldsymbol{r}_i$ を外積を作るように掛けてからすべての $i(i=1\sim n)$について加え合わせると，次式を得る。

$$\sum_{i=1}^{n}(\boldsymbol{r}_i\times m_i\frac{d^2\boldsymbol{r}_i}{dt^2})=\sum_{i=1}^{n}(\boldsymbol{r}_i\times\boldsymbol{F}_i)$$

$$+\boldsymbol{r}_1\times\boldsymbol{F}_{12}+\boldsymbol{r}_1\times\boldsymbol{F}_{13}+\boldsymbol{r}_1\times\boldsymbol{F}_{14}+\cdots+\boldsymbol{r}_1\times\boldsymbol{F}_{1n}$$
$$+\boldsymbol{r}_2\times\boldsymbol{F}_{21}+\boldsymbol{r}_2\times\boldsymbol{F}_{23}+\boldsymbol{r}_2\times\boldsymbol{F}_{24}+\cdots+\boldsymbol{r}_2\times\boldsymbol{F}_{2n}$$
$$+\boldsymbol{r}_3\times\boldsymbol{F}_{31}+\boldsymbol{r}_3\times\boldsymbol{F}_{32}+\boldsymbol{r}_3\times\boldsymbol{F}_{34}+\cdots+\boldsymbol{r}_3\times\boldsymbol{F}_{2n}$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$+\boldsymbol{r}_n\times\boldsymbol{F}_{n1}+\boldsymbol{r}_n\times\boldsymbol{F}_{n2}+\boldsymbol{r}_n\times\boldsymbol{F}_{n3}+\cdots+\boldsymbol{r}_n\times\boldsymbol{F}_{n(n-1)}\qquad ①$$

となる。

作用・反作用の法則より，$\boldsymbol{F}_{ji}=-\boldsymbol{F}_{ij}$ が成り立つので，右辺に現れる内力$\boldsymbol{F}_{ij}$ (ただし $j\neq i$)に関係する項の和は,

$$\boldsymbol{r}_i\times\boldsymbol{F}_{ij}+\boldsymbol{r}_j\times\boldsymbol{F}_{ji}=(\boldsymbol{r}_j-\boldsymbol{r}_i)\times\boldsymbol{F}_{ji}\quad(j\neq i)\qquad ②$$

となる。ここで，ベクトル$\boldsymbol{r}_j-\boldsymbol{r}_i$と$\boldsymbol{F}_{ji}$は平行であるから，これらの外積はゼロとなり，

$$\boldsymbol{r}_i\times\boldsymbol{F}_{ji}+\boldsymbol{r}_j\times\boldsymbol{F}_{ij}=0\quad(j\neq i)\qquad ③$$

となる。

以上より，式①の右辺の内力に関する項はすべて消去され，式 12-25 に示される次式が成り立つ。

$$\sum_{i=1}^{n}(\boldsymbol{r}_i\times m_i\frac{d^2\boldsymbol{r}_i}{dt^2})=\sum_{i=1}^{n}(\boldsymbol{r}_i\times\boldsymbol{F}_i)\qquad ④\qquad (12\text{–}25)$$

３）*4 について

任意の固定点 0 まわりの全角運動量の式は，式 12−28 より

$$\boldsymbol{L}=\sum_{i=1}^{n}(\boldsymbol{r_i}\times m_i\boldsymbol{v_i})\qquad ①$$

と表される。

質点系内の質点 m_i (i=1~n) に関して，点 0 を始点とする位置ベクトルを $\boldsymbol{r}_i$，重心 G を始点とする位置ベクトルを $\boldsymbol{r}_i$'，点 0 を始点とする重心の位置ベクトルを $\boldsymbol{r}_G$ とすると，$\boldsymbol{r}_i = \boldsymbol{r}_G+\boldsymbol{r}_i$'が成り立つ。同様に，速度についても，$\boldsymbol{v}_i = \boldsymbol{v}_G+\boldsymbol{v}_i$'　が成り立つ。これらを用いて，式①を書き直すと，

$$\boldsymbol{L}=\sum_{i=1}^{n}\{(\boldsymbol{r}_G+\boldsymbol{r}'_i)\times m_i(\boldsymbol{v}_G+\boldsymbol{v}'_i)\}$$
$$=\boldsymbol{r}_G\times M\boldsymbol{v}_G+\boldsymbol{r}_G\times(\sum_{i=1}^{n}m_i\boldsymbol{v}'_i)+(\sum_{i=1}^{n}m_i\boldsymbol{r}'_i)\times\boldsymbol{v}_G+(\sum_{i=1}^{n}\boldsymbol{r}'_i\times m_i\boldsymbol{v}'_i)\qquad ②$$

となる。ただし，$M=\sum_{i=1}^{n}m_i$である。また，位置ベクトル $\boldsymbol{r}_i$'で表した重心 $\boldsymbol{r}_G$'　はゼロであるので，

$\sum_{i=1}^{n} m_i \boldsymbol{r}_i' = 0$，$\sum_{i=1}^{n} m_i \boldsymbol{v}_i' = 0$ が成り立つ。これを用いると，式②の全角運動量 $\boldsymbol{L}$ は，

$$\boldsymbol{L} = \boldsymbol{r}_G \times M\boldsymbol{v}_G + \boldsymbol{L}_G \qquad ③$$

となる。これを時間微分し，式 12-6 に示す $M\frac{d^2\boldsymbol{r}_G}{dt^2} = \sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{F}_i$ を用いると，

$$\frac{d\boldsymbol{L}}{dt} = \boldsymbol{r}_G \times \sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{F}_i + \frac{d\boldsymbol{L}_G}{dt} \qquad ④$$

と求まる。

次に，式 12-27 に示す $\frac{d\boldsymbol{L}}{dt} = \boldsymbol{N}$ の右辺の合モーメントについて考える。

$$\boldsymbol{N} = \sum_{i=1}^{n}(\boldsymbol{r}_G + \boldsymbol{r}_i') \times \boldsymbol{F}_i = \sum_{i=1}^{n}(\boldsymbol{r}_G \times \boldsymbol{F}_i) + \sum_{i=1}^{n}(\boldsymbol{r}_i' \times \boldsymbol{F}_i) = \boldsymbol{r}_G \times \sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{F}_i + \sum_{i=1}^{n}(\boldsymbol{r}_i' \times \boldsymbol{F}_i) \qquad ⑤$$

となる。ここで，全外力の重心 G まわりの合モーメント $\boldsymbol{N}_G$

$$\boldsymbol{N}_G = \sum_{i=1}^{n}(\boldsymbol{r}_i' \times \boldsymbol{F}_i) \qquad ⑥$$

を用いると，

$$\boldsymbol{N} = \boldsymbol{r}_G \times \sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{F}_i + \boldsymbol{N}_G \qquad ⑦$$

となる。

式 12-27 に示す $\frac{d\boldsymbol{L}}{dt} = \boldsymbol{N}$ に，式④と式⑦を代入すると，式 12-29 に示す

$$\frac{d\boldsymbol{L}_G}{dt} = \boldsymbol{N}_G \qquad ⑧ \qquad (12\text{–}29)$$

が求まる。

４）*5 について

・並列の場合

k_1，k_2 それぞれの伸びは等しいので，これを δ とする。また，各ばねに発生する復元力を，f_1，f_2 とすると，フックの法則から，次式が成り立つ。

$f_1 = k_1 \cdot \delta$，$f_2 = k_2 \cdot \delta$

復元力に関しては，$f = f_1 + f_2$ であるので，$f = f_1 + f_2 = k_1 \cdot \delta + k_2 \cdot \delta = (k_1 + k_2)\delta$ となり，合成後のばね定数は，

$$k = k_1 + k_2$$

となる。

・直列の場合

k_1，k_2 それぞれの伸びを δ_1，δ_2 とする。また，各ばねに発生する復元力は等しいので，これを f とするとフックの法則から，次式が成り立つ。

$f = k_1 \cdot \delta_1$，$f = k_2 \cdot \delta_2$

合成後のばねの伸びを δ とすると，$\delta = \delta_1 + \delta_2$ である。また，フックの法則から，

$f = k \cdot \delta = k \cdot (\delta_1 + \delta_2) = k \cdot (1/k_1 + 1/k_2) \cdot f$

であるので，$k \cdot (1/k_1 + 1/k_2) = 1$ となり，合成後のばね定数は，

$1/k = 1/k_1 + 1/k_2$ ，つまり $k = \frac{k_1 k_2}{k_1 + k_2}$

となる。