

テイラーの定理は、図 2-11 において、ある関数値 $f(x)$ の近傍の関数値 $f(x+\Delta x)$ を、式 ①のように関数 $f(x)$ の高次（一次、二次、三次、…、 n 次、…）の導関数を係数とする多項式の無限級数を使って表現するものである。

$$f(x+\Delta x) = f(x) + \frac{df(x)}{dx} \frac{\Delta x}{1!} + \frac{d^2f(x)}{dx^2} \frac{(\Delta x)^2}{2!} + \frac{d^3f(x)}{dx^3} \frac{(\Delta x)^3}{3!} + \dots + \frac{d^n f(x)}{dx^n} \frac{(\Delta x)^n}{n!} + \dots \quad \text{①}$$

ここで、 Δx は微小量を考えるので、係数を有限とすると高次の項は省略することができるから、関数値 $f(x+\Delta x)$ を Δx の多項式で近似することが可能となる。例えば、式 2-8 は第 3 項以降を省略した形となっており、増分を一次式、すなわち直線で近似したことになる。

簡単な例として、 $\sqrt{1.01}$ ($=1.0049875621120\dots$) の近似値を求めてみる。

この場合、 $f(x) = \sqrt{x}$ 、 $x = 1.0$ 、 $\Delta x = 0.01$ であり、高次の導関数は次のようになる。

$$\frac{df(x)}{dx} = \frac{1}{2\sqrt{x}}, \quad \frac{d^2f(x)}{dx^2} = -\frac{1}{4x\sqrt{x}}, \quad \frac{d^3f(x)}{dx^3} = \frac{3}{8x^2\sqrt{x}}, \quad \dots$$

まず、式 2-8 のように、式 ① の第 2 項までの近似値は、次のように求められる。

$$f(1.01) \cong f(1.0) + \frac{df(1.0)}{dx} 0.01 = \sqrt{1.0} + \frac{1}{2\sqrt{1.0}} 0.01 = 1.005$$

次に、第 3 項までの近似値は、次のように求められる。

$$f(1.01) \cong f(1.0) + \frac{df(1.0)}{dx} 0.01 + \frac{d^2f(1.0)}{dx^2} \frac{0.01^2}{2} = \sqrt{1.0} + \frac{1}{2\sqrt{1.0}} 0.01 - \frac{1}{4 \cdot 1.0 \sqrt{1.0}} \frac{0.01^2}{2} = 1.0049875$$

さらに、第 4 項、第 5 項、…までの近似を考えることで真の値に近づいていくが、 Δx がある程度小さい場合、工学的には式 2-8 の近似で十分である。