演習問題Ａ　基本の確認をしましょう

8-A1

周速度 v は，　$r = 15 / 2 = 7.5$ m ，$\omega = 2\pi/5 = 1.26$ rad/s として，$v = r\omega$ =9.4 m/s.

向心加速度 a_n は，$a_n = r\omega^2 = 11.9$ m/s^2

8-A2

ハンマーの角変位を θ とする．角加速度 α を一定とし，初期角速度がゼロの状態から加速したとして，角速度の式は次のように表される．

$$\dot{\theta} = \alpha t$$

さらに，初期角変位もゼロからスタートしたと考えて，角変位の式は次のようになる．

$$\theta = \frac{1}{2}\alpha t^2$$

5 秒間に 5 回転させたという条件より，角加速度を求めると，

$$\alpha = \frac{2\theta}{t^2} = \frac{2\times 2\pi\times 5}{5^2} = 2.51 \quad \text{rad/s}^2$$

となる．この値を用いて，投射時の角速度は，

$$\dot{\theta} = 2.51\times 5 = 12.6 \quad \text{rad/s}$$

のように求められる．

8-A3

角加速度を $\ddot{\theta} = \alpha$ （一定），円軌道の半径を R とすると，接線方向の加速度 a_θ は，

$$a_\theta = R\alpha$$

と表される．さらに，円軌跡に沿う自動車の速度の大きさ v_θ は，減速開始時の時刻を t=0，その時の車速を v_0 として，次式のように表される．

$$v_\theta = a_\theta t + v_0 = R\alpha t + v_0$$

さらに，速度の式を時間で積分することにより，円軌跡に沿う移動距離 s_θ は次となる．

$$s_\theta = \frac{1}{2}R\alpha t^2 + v_0 t$$

停止までに 20 秒を要したことから，車速の式を用いて減速角加速度を求めると，

$$R\alpha t + v_0 = 0\,,\quad \alpha = \frac{-v_0}{Rt} = \frac{-80\times 10^3/3600}{100\times 20} = -0.01 \quad \text{rad/s}^2$$

よって，停止までの移動距離は，

$$s_\theta = \frac{1}{2}\times 100\times(-0.01)\times 20^2 + 80\times 10^3/3600\times 20 = 244.4 \quad \text{m.}$$

8-A4

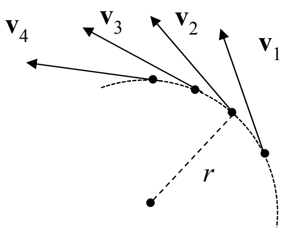
等速円運動なので，速度ベクトルの大きさは変わらない．よって，一定時間 Δt ごとのベクトル先端の軌跡（ホドグラフ）を描くと，ベクトルの大きさ v を半径とした円弧となる．ここで，隣り合う速度ベクトルがなす角度を $\Delta\theta$，差ベクトルを $\mathbf{\Delta v}$ で表すと，その大きさは，

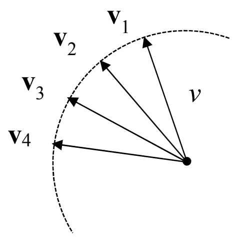
$$|\boldsymbol{\Delta v}| = v\Delta\theta$$

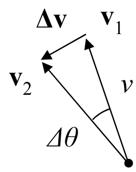
であり，微小時間 Δt あたりの変化量と表して，$\Delta t \to 0$ の極限をとると，

$$\lim_{t\to 0}\left|\frac{\boldsymbol{\Delta v}}{\Delta t}\right| = \lim_{t\to 0}\left(v\frac{\Delta\theta}{\Delta t}\right) = v\dot{\theta}$$

となる．ここで，角速度 $\dot{\theta} = \omega$（一定），$v = r\omega$ なので，上式の値は $r\omega^2$ となり，速度の変化を表す量なので，加速度に相当する．また，その向きは明らかに円軌道の中心を向いている．







演習問題Ｂ　もっと使えるようになりましょう

8-B1

おもりの半径方向の速度と加速度を v_r，a_r，周方向の速度と加速度を v_θ，a_θ とする．

半径方向速度については，長さの変化はないので，

$$v_r = 0$$

また，半径方向の加速度については，向心加速度が作用するので，

$$a_r = -l\dot{\theta}^2 = -l{\theta_0}^2\omega^2\sin^2\omega t$$

次に，周方向の速度は，

$$v_\theta = l\dot{\theta} = -l\theta_0\omega\sin\omega t$$

さらに，周方向加速度は，

$$a_\theta = l\ddot{\theta} = -l\theta_0\omega^2\cos\omega t$$

と書き表すことができる．

半径方向の加速度が最大となるのは，$\omega t = \dfrac{n\pi}{2}$（$n$ は整数）のときであり，角度としては θ=0°のときである．このとき同時に，周方向速度も最大となる．また，周方向加速度が最大となるのは，$\omega t = n\pi$ のときであって，このときの角度は $\theta = \pm\theta_0$ である．なお，この場合の符号は無視し，絶対値最大として取り扱った．

8-B2

一定周速度を v，カーブ半径を R として，接線方向加速度 a_θ，法線方向加速度 a_r は次のように求まる．

$$a_\theta = 0$$

$$a_r = R\omega^2 = R\frac{v^2}{R^2} = \frac{v^2}{R}$$

すべり限界を決める加速度は，二者を合成したベクトルの大きさで決まるが，この場合は法線方向加速度のみで決まるので，$\dfrac{v^2}{R} = 0.5g$ として，

$v = \sqrt{0.5gR} = 22.1$ m/s.　　よって，22.1×3600÷1000 = 79.7 km/h.

8-B3

質点が，らせんに沿って 360°回転するごとに，鉛直下方（z の負方向）に 1 ピッチ分の距離 p だけ落ちることから，z 方向の質点位置は θ を用いて次のように表される．

$$z = -\frac{p\theta}{2\pi}$$

上式を時間で二階微分すると，z 方向への質点の加速度となり，これが一定加速度 g と等しいことから，

$$\ddot{z} = -\frac{p\ddot{\theta}}{2\pi} = -g$$

これより，角加速度は，$\ddot{\theta} = \dfrac{2\pi g}{p}$ となる．

また, 角速度は, 角加速度の式を時間積分し, 初期条件として, t=0 で $\dot{\theta} = 0$ を与えることにより, 次のように求まる.

$$\dot{\theta} = \frac{2\pi g}{p} t$$