演習問題 A】

9-A1

物体の移動加速度を$\boldsymbol{a}$，時間を$\boldsymbol{t}$とすると，その移動距離$\boldsymbol{S}$は次のようになる。

$$S=\frac{1}{2}at^2$$

これを$\boldsymbol{a}$について解いて数値を代入すると，$\boldsymbol{a}$は次のように求められる。

$$a=\frac{2S}{t^2}=\frac{2\times 1.50}{3.09^2}=0.31 \text{ m/s}^2$$

一方，例題 9―1 にあるように加速度，二つの物体の質量と重力加速度との間には，

$$a=\frac{m_2-m_1}{m_1+m_2}g$$

の関係が成立つために，この式を$\boldsymbol{g}$について解いて数値を代入すると，次のようになる。

$$g=\frac{m_1+m_2}{m_2-m_1}a=\frac{15+16}{16-15}\times 0.31=9.61 \text{ m/s}^2$$

9-A2

列車の質量を$\boldsymbol{m}$，速度を$\boldsymbol{v}$とすると，その運動方程式は次のように与えられる。

$$m\frac{dv}{dt}=-\frac{1}{50}mg$$

上式の両辺を$\boldsymbol{m}$で除すると，

$$\frac{dv}{dt}=-\frac{1}{50}g \qquad (1)$$

ここで$\dfrac{dv}{dt}$は，移動距離を$\boldsymbol{S}$として$\dfrac{dv}{dt}=\dfrac{dv}{dS}\dfrac{dS}{dt}=v\dfrac{dv}{dS}$と変換できるため，式(1)は以下のように書き換えられる。

$$v\frac{dv}{dS}=-\frac{1}{50}g \qquad (2)$$

列車の初速度をv_0，最終移動距離をS_eとして式(2)を次のように定積分する。

$$\int_{v_0}^{0}v\,dv=-\frac{1}{50}g\int_0^{S_e}dS$$

したがって，$\dfrac{1}{2}v_0^2=\dfrac{1}{50}g\cdot S_e$　となり，これをS_eについて解いて値を代入すると，列車の停止距離(＝最終移動距離)は次のように求められる。つまり，

$$S_e=\frac{1}{2}v_0^2\frac{50}{g}=\frac{1}{2}\left(\frac{60\times 10^3}{3600}\right)^2\frac{50}{9.8}=708.6 \text{ m}$$

9-A3

坂の角度を $\theta\left(=\sin^{-1} h/l\right)$ とすると，物体の運動方程式は

$$m\frac{dv}{dt}=mg\sin\theta-f$$
$$=mg\frac{h}{l}-f$$

一方，演習問題 9-A2 の解答例でも記したように，移動距離を S として $\frac{dv}{dt}=\frac{dv}{dS}\frac{dS}{dt}=v\frac{dv}{dS}$ が成立つから先の運動方程式は次のように書き換えることができる。

$$mv\frac{dv}{dS}=mg\frac{h}{l}-f$$

これを定積分すると，

$$\int_0^v v\,dv=\int_0^l\left(g\frac{h}{l}-\frac{f}{m}\right)dS$$
$$\frac{1}{2}v^2=\left(g\frac{h}{l}-\frac{f}{m}\right)\cdot l=g\cdot h-\frac{f\cdot l}{m}$$

したがって，

$$v=\sqrt{2\left(g\cdot h-\frac{f\cdot l}{m}\right)}$$

を得る。

9-A4

図中に設けた各座標軸方向の運動方程式は次のようになる。

$$m\ddot{x}=-mg\sin\alpha \qquad (1)$$
$$m\ddot{y}=-mg\cos\alpha \qquad (2)$$

式(1)と(2)を，初期条件を考慮してそれぞれ時間 t で積分すると，次のようになる。

$$\dot{x}=-gt\sin\alpha+v_0\cos\beta$$
$$\dot{y}=-gt\cos\alpha+v_0\sin\beta$$

$$x=-\frac{1}{2}gt^2\sin\alpha+v_0t\cos\beta \qquad (3)$$

$$y=-\frac{1}{2}gt^2\cos\alpha+v_0t\sin\beta \qquad (4)$$

$y=0$ となる時間 T は，関係式(4)を適用して

$$0=-\frac{1}{2}gT^2\cos\alpha+v_0T\sin\beta=\left(-\frac{1}{2}gT\cos\alpha+v_0\sin\beta\right)T$$

となるから，これより $T=0,\ \frac{2\sin\beta}{g\cos\beta}v_0$ が得られる。したがって，物体の到達距離 S は $T=\frac{2\sin\beta}{g\cos\beta}v_0$ を式(3)に代入することで求められる。つまり，

$$S=-\frac{1}{2}g\left(\frac{2\sin\beta}{g\cos\alpha}v_0\right)^2\sin\alpha+v_0\frac{2\sin\beta}{g\cos\alpha}v_0\cos\beta=\frac{-2\sin^2\beta\sin\alpha+2\sin\beta\cos\beta\cos\alpha}{g\cos^2\alpha}v_0^2$$
$$=\frac{2v_0^2}{g\cos^2\alpha}\cos(\alpha+\beta)\sin\beta$$

9-A5

エレベータの加速度を a，床から受ける反力を f とすると，ダランベールの原理によりエレベータが上昇するときには次のような式が成立つ。つまり， $f-ma-mg=0$ 　これより f は，

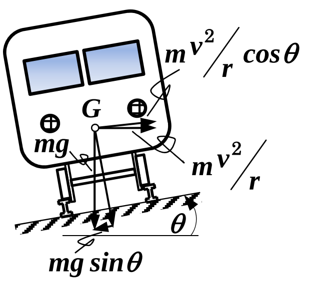
$$f=m(a+g)=60(2+9.8)=708\ \ \mathrm{N}$$

が得られる。また，エレベータが降下する場合は， $f+ma-mg=0$ が成立つから，これより

$$f=m(g-a)=60(9.8-2)=468\ \ \mathrm{N}$$

となる。

9-A6



左図のように θ をとると，外側レールに側圧が作用しないための条件は次のように与えられる。つまり，

$$m\frac{v^2}{r}\cos\theta \le mg\sin\theta$$

これを θ について解くと，

$$\theta \ge \tan^{-1}\left(\frac{v^2}{r}\frac{1}{g}\right)=\tan^{-1}\left[\frac{1}{2500}\left(\frac{200\times10^3}{3600}\right)^2\frac{1}{9.8}\right]=7.2\,°=0.125\ \ \mathrm{rad}$$

したがって，内側と外側のレールの高さの差 Δh は，次のようになる。

$$\Delta h=1435\cdot\sin\theta=1435\times\sin(7.2°)=179.9\ \ \mathrm{mm}$$

【演習問題 B】

9-B1

物体の運動方程式は次のようになる。

$$m\frac{dv}{dt} = mg - Cv \qquad (1)$$

式(1)は変数分離型の微分方程式であり，同式を変形して積分する。

$$\begin{aligned} m\int\frac{1}{mg-Cv}dv &= \int dt + A \\ -\frac{m}{C}ln(mg-Cv) &= t + A \end{aligned} \qquad (2)$$

ここに A は積分定数であり，$t=0$ のときに $v=0$ とすると，$A=-\frac{m}{C}ln(mg)$ となり，式(2)に代入して，

$$-\frac{m}{C}ln(mg - Cv) = t - \frac{m}{C}ln(mg) \qquad (3)$$

が得られる。式(3)を v について解くと次式のようになる。

$$v = \frac{mg}{C}\left(1-e^{-\frac{C}{m}t}\right) \qquad (4)$$

ここで，$t \to \infty$のとき，$v = V$ とするならば式(4)から$V = \frac{mg}{C}$ を得る。これから$C = \frac{mg}{V}$ となり，結局式(4)は次のようになる。

$$v = \frac{mg}{mg/V}\left(1-e^{-\frac{1}{m}\frac{mg}{V}t}\right) = V\left(1-e^{-\frac{g}{V}t}\right) \qquad (5)$$

したがって，$v = V/2$ と置き換えて式(5)を書き直すと，$\frac{V}{2} = V\left(1-e^{-\frac{g}{V}t}\right)$ となる。この式から v が$V/2$ となる時間 t を次のように求めることができる。

$$t = \frac{V}{g}ln2$$

9-B2

各物体の運動方程式は，以下のように与えられる。

物体① : $m_1a = T_1 - \mu_k m_1 g$ (1)

物体② : $m_2a = -T_1 + T_2 + m_2 g$ (2)

物体③ : $m_3a = -T_2 + m_3 g$ (3)

式(1)～(3)を連立して解き，値を代入するならばロープの張力 T_1，T_2 と，加速度 a はそれぞれ次のように求められる。

$$T_1=\frac{m_1(m_2+m_3)(1+\mu_k)}{m_1+m_2+m_3}g=\frac{5(2+3)(1+0.1)}{5+2+3}\times 9.8=27.0\ \ \mathrm{N}$$

$$T_2=\frac{m_1 m_3(1+\mu_k)}{m_1+m_2+m_3}g=\frac{5\times 3(1+0.1)}{5+2+3}\times 9.8=16.2\ \ \mathrm{N}$$

$$a=\frac{m_2+m_3-\mu_k m_1}{m_1+m_2+m_3}g=\frac{2+3-0.1\times 5}{5+2+3}\times 9.8=4.4\ \ \mathrm{m/s^2}$$

9-B3

はじめに，物体①と②が h の距離だけ移動した直後の速度を求める必要がある。そこで，物体①と②が h の距離を移動している間の運動方程式は，加速度を a，ロープの張力を T とするとそれぞれ以下にように与えられる。

物体①　:　$m_1 a = T - \mu_k m_1 g$　　(1)

物体②　:　$m_2 a = -T + m_2 g$　　(2)

式(1)と(2)を連立すると加速度 a は次のように求められる。

$$a=\frac{m_2-\mu_k m_1}{m_1+m_2}g \qquad (3)$$

初期変位および初速度はいずれもゼロであることを考慮して，式(3)を時間 t で積分すると速度 v と移動距離 s はそれぞれ次のようになる。

$$v=\frac{m_2-\mu_k m_1}{m_1+m_2}gt\ \ ,\ \ s=\frac{1}{2}\frac{m_2-\mu_k m_1}{m_1+m_2}gt^2$$

これらより，物体①と②が h の距離だけ移動するのに要する時間 t_h と，そのときの速度 v_h は以下のように求められる。

$$t_h=\sqrt{\frac{2h}{g}\frac{m_1+m_2}{m_2-\mu_k m_1}}\ \ ,\ \ v_h=\sqrt{2hg\frac{m_2-\mu_k m_1}{m_1+m_2}}$$

物体②が h の距離だけ移動した後も物体①は，運動し続ける。そのときの物体①の加速度を a' とすると，その運動方程式は次のように与えられる。

$$m_1 a' = -\mu_k m_1 g \qquad (4)$$

物体①と②が h の距離だけ移動を終えたときを起点とした時間 t' で，式(4)を積分すると速度 v' と移動距離 s' はそれぞれ，

$$v' = -\mu_k g t' + v_h \qquad (5)$$

$$s' = -\frac{1}{2}\mu_k g t'^2 + v_h t' \qquad (6)$$

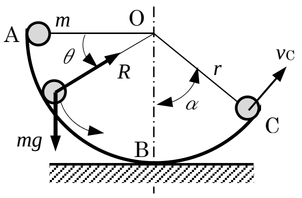
式(5)より，物体①と机との間の摩擦によって物体①が運動を停止するのに要する時間 t_e' は，

$$t_e'=\frac{v_h}{\mu_k g}=\frac{1}{\mu_k}\sqrt{\frac{2h}{g}\frac{m_2-\mu_k m_1}{m_1+m_2}}$$

となり，これを式(6)に代入し，さらに物体②と床面との距離 h を加えると，最初の静止位置から物体①が移動した距離 S は次のように求められる。つまり，

$$S = s'\big|_{t'=t_e'} + h = -\frac{1}{2}\mu_k g t_e'^{\,2} + v_h t_e' + h$$
$$= \frac{m_2 - \mu_k m_1}{m_1 + m_2}\frac{h}{\mu_k} + h$$

9-B4



上図のように，質量 m が点 A から任意角変位 θ だけ移動したところでの接線方向の運動方程式は，

$$m\dot{v} = mg\cos\theta \qquad (1)$$

であり，ここで

$$\dot{v} = \frac{dv}{dt} = \frac{dv}{d\theta}\frac{d\theta}{dt} = \frac{v}{r}\frac{dv}{d\theta} = \frac{1}{2r}\frac{d\left(v^2\right)}{d\theta}$$

のように変数変換できるため，式(1)は次のようになる。

$$\frac{1}{2r}\frac{d\left(v^2\right)}{d\theta} = g\cos\theta \qquad (2)$$

式(2)を積分し，初速度はゼロであることを考慮すると

$$v^2 = 2rg\sin\theta \qquad (3)$$

となり，したがって，点 C での速度 v_C は $\theta = \pi/2 + \alpha$ を式(3)に代入して以下のように求められる。

$$v_C^2 = 2rg\sin\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = 2rg\cos\alpha \qquad (4)$$

また，円筒面から物体に作用する反力を R とすれば，法線方向の運動方程式は次のように与えられる。

$$m\frac{v^2}{r} = R - mg\sin\theta \qquad (5)$$

式(5)を R について解き，そこに $\theta = \pi/2 + \alpha$ と式(4)の結果を代入すると，物体が円筒面から飛び出す瞬間の反力 R_C は，次のように求められる。つまり，

$$R_C = m\left(\frac{v^2}{r} + g\sin\theta\right) = m\left\{\frac{1}{r}2rg\cos\alpha + g\sin\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right)\right\}$$
$$= 3mg\cos\alpha$$