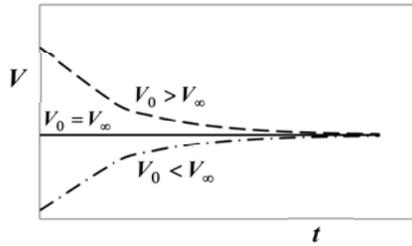


$V_0 = V_\infty \left(= \frac{mg}{C} \right)$, $V_0 > V_\infty$, $V_0 < V_\infty$ の各場合について、横軸に時間 t を、そして縦軸に V

をとって式 9-9 を図示すると下図のようになる。 V_0 の大小にかかわらず、物体の速度 V は時間の経過に伴って終速度 V_∞ に近づくことが確認できる。



*8

前例と同様、空気抵抗力の比例定数を C とすると、 x と y の各軸方向の運動方程式は、

$$m\ddot{x} = m \frac{dV_x}{dt} = -CV_x \quad (1)$$

$$m\ddot{y} = m \frac{dV_y}{dt} = -mg - CV_y \quad (2)$$

となり、式 9-6 の場合と同じ様にして式(1)を積分すると、

$$t = -\frac{m}{C} \int \frac{1}{V_x} dV_x + A_1 = -\frac{m}{C} \ln(V_x) + A_1 \quad (3)$$

ここで A_1 は積分定数で、初期条件 $t = 0$ のとき $V_x = v_0 \cos \theta$ であることから、

$A_1 = \frac{m}{C} \ln(v_0 \cos \theta)$ となり、これを式(3)に代入して V_x について解くと次のようになる。

$$V_x = e^{-\frac{C}{m}t} v_0 \cos \theta \quad (4)$$

さらに式(4)を初期条件 $t = 0$ のとき $x = 0$ であることを考慮して積分し、整理すると次のようになる。

$$x = \frac{m}{C} v_0 \left(1 - e^{-\frac{C}{m}t} \right) \cos \theta \quad (5)$$

また、式(2)についても上と同様に A_2 を積分定数として時間積分するならば、

$$t = -\int \frac{m}{mg + CV_y} dV_y + A_2 = -\frac{m}{C} \ln(mg + CV_y) + A_2 \quad (6)$$

初期条件 $t = 0$ のとき $V_y = v_0 \sin \theta$ であることから $A_2 = \frac{m}{C} \ln(mg + Cv_0 \sin \theta)$ となる。これを式

(6)に代入し、 V_y について解くと次のようになる。

$$V_y = -\frac{mg}{C} + \left(\frac{mg}{C} + v_0 \sin \theta \right) e^{-\frac{C}{m}t} \quad (7)$$

さらに式(6)を初期条件 $t = 0$ のとき $y = 0$ であることを考慮して積分し、整理すると y は次

のように与えられる。

$$y = -\frac{mg}{C}t + \frac{m}{C}\left(\frac{mg}{C} + v_0 \sin \theta\right)\left(1 - e^{-\frac{C}{m}t}\right) \quad (8)$$

時間 $t \rightarrow \infty$ になると、式(5)と(8)から $x \rightarrow \frac{m}{C}v_0 \cos \theta$, $y \rightarrow -\infty$ となる。一方、速度については式(4)と(7)より $V_x \rightarrow 0$, $V_y \rightarrow -\frac{mg}{C}$ となり、特に V_y の大きさは本文中に示した V_∞ のそれと一致する。ただし、垂直方向の座標系の取り方が図 9-1 と図 9-2 では反対であるため、 V_y にはマイナスの符号が付くことに注意してほしい。