10 章 演習問題 解答

10-A1 (1) $\omega_n{=}\dfrac{n\pi}{L}\sqrt{\dfrac{T}{\rho_L}}$ より，$\omega_1{=}\dfrac{\pi}{2}\sqrt{\dfrac{800}{2}}{=}10\pi$,　$f_1{=}\dfrac{\omega_n}{2\pi}{=}5\text{Hz}$.

* ω_n, f_n の n は本来「natural (angular) frequency：固有 (角) 振動数」の頭文字であり，振動モードの次数 n=1,2,$\cdots$ の n とは異なる．本書では簡略化のため，n=1 のときの ω_n, f_n をそれぞれ ω_1, f_1 と表記する．

(2) 直径が 2 倍になると線の断面積が 4 倍になるため，線密度 ρ_L[kg/m] が 4 倍となる．よって ρ_L=8kg/m とし，(1) と同様に計算すると f_1=2.5Hz .

10-A2 丸棒の一端を固定した場合：一端固定一端自由として計算．式 10-27 より $\omega_1{=}\dfrac{\pi}{2L}\sqrt{\dfrac{E}{\rho}}$.

宙に浮かせた場合：両端自由として計算．式 10-28 より $\omega_1{=}\dfrac{\pi}{L}\sqrt{\dfrac{E}{\rho}}$.

以上より，宙に浮かせた場合の方が基本固有角振動数 ω_1 が 2 倍高くなる． $\omega{=}2\pi f$ の関係より，基本固有振動数 f_1 も宙に浮かせた場合の方が 2 倍高くなる．

10-A3 $I = \dfrac{1}{12}bh^3 = \dfrac{1}{12}\times(20\times10^{-3})\times(2\times10^{-3})^3{=}\dfrac{40}{3}\times10^{-12}\ \text{m}^4$, $A = bh = 40\times10^{-6}\ \text{m}^2$

$$\sqrt{\frac{EI}{\rho A}} = \sqrt{\frac{206\times10^9\times40\times10^{-12}}{7800\times40\times10^{-6}\times3}} = 2.9671\ \text{m}^2\ /\text{s}$$

式 10-39 に両端自由はりの固有値 $\alpha_1 L$=4.7300, $\alpha_2 L$=7.8532, $\alpha_3 L$=10.9956 を代入し，f_1, f_2, f_3 を求める．

$$f_1{=}\ \frac{4.7300^2}{2\pi}\times2.9671{=}10.57\text{Hz},\ f_2{=}\ \frac{7.8532^2}{2\pi}\times2.9671{=}29.12\text{Hz},\ f_3{=}\ \frac{10.9956^2}{2\pi}\times2.9671{=}57.09\text{Hz},\ .$$

10-A4 両端から 50m の位置に振動の腹がくることから，図 1 より 2 次モードで振動していると考えられる．よって

$$f_2{=}\ \frac{\omega_2}{2\pi} = \frac{4\pi^3}{2\pi L^2}\sqrt{\frac{EI}{\rho A}} = \frac{2\pi}{L^2}\sqrt{\frac{EI}{\rho A}} = \frac{2\pi}{200^2}\sqrt{\frac{25\times10^9\times1/12\times10\times1.5^3}{2700\times10\times1.5}} = 0.207\text{Hz}\ .$$

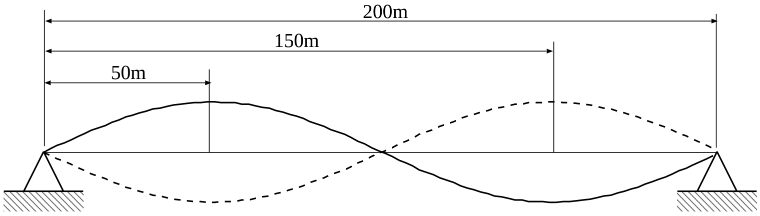

図 1

10-A5 直径 d のとき，$I=\dfrac{\pi}{64}d^4=\dfrac{\pi}{64}(7.5\times10^{-3})^4= 155.32\times10^{-12}$ m^4

断面積 $A=\pi\left(\dfrac{d}{2}\right)^2=\pi\left(\dfrac{7.5\times10^{-3}}{2}\right)^2 = 44.179\times10^{-6}$ m^2

$$\sqrt{\frac{EI}{\rho A}} = \sqrt{\frac{69\times10^9\times155.32\times10^{-12}}{2800\times44.179\times10^{-6}}} = 9.308 \text{ m}^2/\text{s}$$

式 10-39 に片持ちはりの固有値 $\alpha_1 L$=1.8751 を代入して ω_1 を求める．

$$\omega_1= \frac{1.8751^2}{0.9^2}\times9.308= 40.4 \text{ rad/s} .$$

10-B1 (1) x=L において軸力 N とばねの復元力 $kU(L)$ が釣り合うので，$N=AE\dfrac{dU(L)}{dx} = -kU(L)$ より

$$\frac{dU(L)}{dx}+\frac{k}{AE}U(L)=0 .$$

(2) x=0 は固定端より $U(0)$=0．式 10-20 より

$$U(x)=C_3\sin\left(\frac{\omega}{c}\right)x+C_4\cos\left(\frac{\omega}{c}\right)x$$

$$\frac{dU(x)}{dx}=C_3\left(\frac{\omega}{c}\right)\cos\left(\frac{\omega}{c}\right)x-C_4\left(\frac{\omega}{c}\right)\sin\left(\frac{\omega}{c}\right)x$$

$U(0)$=0 より C_4=0, (1) より $C_3\left(\dfrac{\omega}{c}\right)\cos\left(\dfrac{\omega}{c}\right)L+\dfrac{k}{AE}C_3\sin\left(\dfrac{\omega}{c}\right)L=0$

$$\therefore\quad \tan\left(\frac{\omega L}{c}\right)=-\frac{AE}{kL}\left(\frac{\omega L}{c}\right)$$

*補足 1： (2) で得られた振動数方程式より，$y=\tan\left(\dfrac{\omega L}{c}\right)$ と $y=-\dfrac{AE}{kL}\left(\dfrac{\omega L}{c}\right)$ を縦軸 y，横軸 $\dfrac{\omega L}{c}$ の座標上に描き，グラフの交点を求めることで ω の値を求めることができる．

*補足 2： (2) で得られた振動数方程式は, $k\to\infty$ のとき $\tan\left(\dfrac{\omega L}{c}\right)$=0 より $\omega_n=\dfrac{n\pi c}{L}$ となり, 両端固定の場合 (式 10-22) と一致する．また，$k\to0$ のとき $\tan\left(\dfrac{\omega L}{c}\right)=\infty$ より $\omega_n=\dfrac{(2n-1)\pi c}{2L}$ となり，一端固定一端自由の場合 (式 10-26) と一致する．

10-B2 図イの微小区間におけるねじり振動の運動方程式は次式となる．

$$Idx\frac{\partial^2\alpha(x,t)}{\partial t^2}=T(x+dx,t)-T(x,t)$$

ここで，ねじりモーメント $T(x,t)$ について考える．材料力学から，せん断応力 $\tau=G\gamma$, $\tau=Tr/I_p$ より $T=GI_p\gamma/r$ となる．ここで，r は軸の半径，γ はせん断ひずみである．

せん断ひずみ γ は定義より次式となる．

$$\gamma = \frac{r\alpha(x+dx,t)p - r\alpha(x,t)}{dx}$$

テイラー展開を用い整理すると，次式が得られる．

$$\gamma = r\frac{\partial\alpha(x,t)}{\partial x}$$

$T = GI_p\gamma/r$ より，$T = GI_p\dfrac{\partial\alpha(x,t)}{\partial x}$ が得られる．以上を運動方程式に代入し，次式を得る．

$$Idx\frac{\partial^2\alpha(x,t)}{\partial t^2} = GI_p\frac{\partial\alpha(x+dx,t)}{\partial x} - GI_p\frac{\partial\alpha(x,t)}{\partial x}$$

テイラー展開を用い整理すると，次式が得られる．

$$\frac{\partial^2\alpha(x,t)}{\partial t^2} = c^2\frac{\partial^2\alpha(x,t)}{\partial x^2}\ ,\quad c = \sqrt{\frac{GI_p}{I}} = \sqrt{\frac{G}{\rho}}$$

上式が軸のねじり振動の運動方程式である．ここで，ρ：体積密度である．このように，軸のねじり振動の運動方程式も波動方程式となる．

10-B3 $x=0$ における境界条件 $\dfrac{d^2W(0)}{dx^2} = 0,\ \dfrac{d^3W(0)}{dx^3} = 0$

$x=L$ における境界条件 $\dfrac{d^2W(L)}{dx^2} = 0,\ \dfrac{d^3W(L)}{dx^3} = 0$

式 10-43, 10-44 より
$-C_1 + C_3 = 0$
$-C_2 + C_4 = 0$
$-C_1\cos\alpha L - C_2\sin\alpha L + C_3\cosh\alpha L + C_4\sinh\alpha L = 0$
$C_1\sin\alpha L - C_2\cos\alpha L + C_3\sinh\alpha L + C_4\cosh\alpha L = 0$

行列でまとめると

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ -\cos\alpha L & -\sin\alpha L & \cosh\alpha L & \sinh\alpha L \\ \sin\alpha L & -\cos\alpha L & \sinh\alpha L & \cosh\alpha L \end{pmatrix}\begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \\ C_3 \\ C_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

これを $\mathbf{AC} = \mathbf{0}$ とおく．$\mathbf{C}$ が非自明解を持つには，$\det\mathbf{A}=0$ が条件となる．

$$
\begin{vmatrix}
-1 & 0 & 1 & 0 \\
0 & -1 & 0 & 1 \\
-\cos\alpha L & -\sin\alpha L & \cosh\alpha L & \sinh\alpha L \\
\sin\alpha L & -\cos\alpha L & \sinh\alpha L & \cosh\alpha L
\end{vmatrix}
$$

$$
= -\begin{vmatrix}
-1 & 0 & 1 \\
-\sin\alpha L & \cosh\alpha L & \sinh\alpha L \\
-\cos\alpha L & \sinh\alpha L & \cosh\alpha L
\end{vmatrix}
-\cos\alpha L\begin{vmatrix}
0 & 1 & 0 \\
-1 & 0 & 1 \\
-\cos\alpha L & \sinh\alpha L & \cosh\alpha L
\end{vmatrix}
$$

$$
-\sin\alpha L\begin{vmatrix}
0 & 1 & 0 \\
-1 & 0 & 1 \\
-\sin\alpha L & \cosh\alpha L & \sinh\alpha L
\end{vmatrix}
$$

$$
= -(-\cosh^2\alpha L - \sin\alpha L\sinh\alpha L + \cos\alpha L\cosh\alpha L + \sinh^2\alpha L) - \cos\alpha L(-\cos\alpha L + \cosh\alpha L)
$$

$$
-\sin\alpha L(-\sin\alpha L + \sinh\alpha L)
$$

$$
= (\cosh^2\alpha L - \sinh^2\alpha L) + (\cos^2\alpha L + \sin^2\alpha L) - 2\cos\alpha L\cosh\alpha L
$$

$$
= 2 - 2\cos\alpha L\cosh\alpha L = 0 \quad (\because \ \cosh^2\alpha L - \sinh^2\alpha L = 1)
$$

$$
\therefore \ \cos\alpha L\cosh\alpha L = 1
$$