演習問題Ａ　基本の確認をしましょう

2-A1　物体の自由度とは何か，具体例を挙げて説明せよ。

（解答例）

対象とする物体の運動を表すために最少の座標の数を自由度（degree of freedom）と呼ぶ。例えば，縮まないロープの一端を固定し，他端におもりを付けて吊るして振らせた振り子の運動は 1 自由度である。なぜなら，その運動は鉛直線からのロープの角度さえあれば表現できるからである。

2-A2　図 2-4 において，$k_1 = 1000$ [N/m]，$k_2 = 2000$ [N/m] のとき，それぞれの合成ばね定数 k の値を求めよ。

（解答例）

・並列接続の場合

$$k = k_1 + k_2 = 1000 + 2000 = 3000 \quad \text{[N/m]}$$

・直列接続の場合

$$k = \frac{k_1 k_2}{k_1 + k_2} = \frac{1000 \times 2000}{1000 + 2000} = 666.66 \cdots = 667 \ \text{[N/m]}$$

2-A3　慣性モーメントと，物体の回転しやすさ，回転の止めやすさについて説明せよ。

（解答例）

慣性モーメントとは，直感的には回転を始める，もしくは止めるのに必要な力の量を示すものである。回転軸に対して対象の質量がどのように分布するかによって慣性モーメントは変化する。例えば，質量 m の棒の一端を持って振る場合と，中点を持って振る場合を考える。後者と比較して前者は，回転軸となる棒の一端から質量が遠くに分布していることになるので慣性モーメントが大きくなる。その場合，棒は振り出しにくく，止めにくい。それに対して，棒の中点を持った場合は慣性モーメントが比較的小さくなり，棒を振り出しやすく（回転しやすく），止めやすい。

2-A4　振動系のモデル化をなぜ行うのか，その理由について説明せよ。

（解答例）

機械の振動現象は複数の要因が複雑に関連して発生している場合がほとんどであるので解析は困難である。そこで，その機械の物理的な特性を適切に表した比較的簡素な力学モデルを用いて解析が行われる。力学モデルは，ばねやダッシュポットといった復元力，減衰力や質量，慣性モーメントなどを組み合わせたものであり，その力学モデルを得ることを振動系のモデル化と呼ぶ。高層ビルのような構造物のモデルは多数の運動方程式を用いるので，行列，ベクトルを使って表現されることが多い。いずれにせよ，解析する現象に適切な力学モデルを構築することが重要である。

演習問題Ｂ　もっと使えるようになりましょう

2-B1　ヒトの片腕は何自由度あるか，説明せよ。

（解答例）

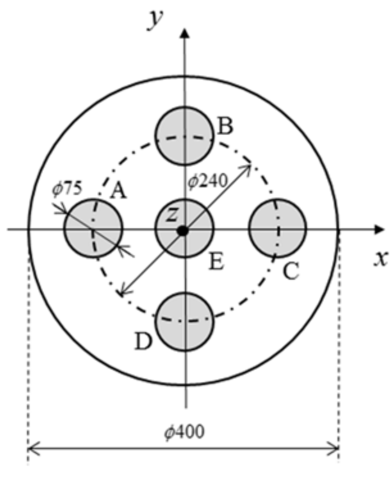
肩，手首がそれぞれ３自由度，肘が１自由度と考えると，合計７自由度として考えられる。

2-B2　長さ 1m，縦弾性係数 206GPa，断面二次モーメント 1.26cm^4 の丸鋼管　の片持ちばりが，先端荷重を受ける場合のばね定数を求めよ。

（解答例）

$$k = \frac{3EI}{l^3} = \frac{3\times 206\times 10^9 \times 1.26\times (10^{-2})^4}{1^3} = 7790 \text{ [N/m]}$$

2-B3　下図に示すような直径 75mm の 5 個の穴 A～E を持つ，厚さ 25mm，直径 400mm の鋳鉄製円板がある。穴 A～D は，直径 240mm の同心円上に等間隔に設けられている。鋳鉄の密度を 7.28 g/cm^3 とするとき，円板の中心を通り板面に垂直な軸 z に関する慣性モーメントを求めよ。



（解答例）

表 2-2 に示した円柱の z 軸周りの慣性モーメント $mr^2/2$ と，平行軸の定理を用いて題意の慣性モーメントを求める。

・穴 E に相当する円柱の質量 m'，慣性モーメント I'_Z

$$m' = \frac{\pi\times 0.075^2}{4}\times 0.025\times 7.28\times 10^3 \quad \text{[kg]}$$

$$I'_Z = \frac{m'\times (0.075/2)^2}{2} = \frac{m'\times 0.075^2}{8} \quad \text{[kgm}^2\text{]}$$

・穴 A～D に相当する円柱 1 つの質量 m''，慣性モーメント I''_Z

$$m'' = m' \quad \text{[kg]}$$

慣性モーメントI''_Zは，平行軸の定理を用いて求める。穴 A～D が，半径 120mm の同心円上に配置されていることから

$$I''_Z = I'_Z + m'' \times 0.12^2 \quad [\mathrm{kgm^2}]$$

・穴 E に相当する円柱の質量m，慣性モーメントI_Z

$$m = \frac{\pi \times 0.4^2}{4} \times 0.025 \times 7.28 \times 10^3 \quad [\mathrm{kg}]$$

$$I_Z = \frac{m \times (0.4/2)^2}{2} = \frac{m \times 0.4^2}{8} \quad [\mathrm{kgm^2}]$$

・求める慣性モーメントI

$$\begin{aligned}
I &= I_Z - I'_Z - 4 \times I''_Z \\
&= \frac{\frac{\pi \times 0.4^2}{4} \times 0.025 \times 7.28 \times 10^3 \times 0.4^2}{8} - \frac{\frac{\pi \times 0.075^2}{4} \times 0.025 \times 7.28 \times 10^3 \times 0.075^2}{8} \\
&\qquad - 4 \times \left(\frac{\frac{\pi \times 0.075^2}{4} \times 0.025 \times 7.28 \times 10^3 \times 0.075^2}{8} + \frac{\pi \times 0.075^2}{4} \times 0.025 \times 7.28 \times 10^3 \times 0.12^2 \right) \\
&= 4.04 \times 10^{-1} \quad [\mathrm{kg}]
\end{aligned}$$

2-B4　図 2-8(b)に示す 2 自由度 1/4 車体モデルの運動方程式を求めよ。

（解答例）

$$m_2 \ddot{x}_2 = -k_2 (x_2 - x_1) - c_2 (\dot{x}_2 - \dot{x}_1)$$

$$m_1 \ddot{x}_1 = k_2 (x_2 - x_1) + c_2 (\dot{x}_2 - \dot{x}_1) - k_1 (x_1 - d)$$

2-B5　図 2-6(b)に示す半径rの円柱に作用する張力Tと，円柱の重心における加速度を求めよ。

（解答例）

円柱の質量を m，円柱の重心周りの慣性モーメントを$I\left(=\dfrac{mr^2}{2}\right)$とする，また，円柱の重心の鉛直下方に向いた位置を$x$，重心周りの回転角を$\theta$とする。円柱の並進運動は，重心に位置するとした質点 m の並進運動と等価として考えられるので，その運動方程式は以下のように表すことができる。

$$m\ddot{x} = mg - T \quad \rightarrow \quad \ddot{x} = g - \frac{T}{m} \quad \text{---（1）}$$

一方，円柱の回転に関する運動方程式は以下のように表すことができる。

$$I\ddot{\theta} = Tr \quad \rightarrow \quad \frac{mr^2}{2}\ddot{\theta} = Tr \qquad \text{---}\ (2)$$

ひもがたるまないとした時，以下の関係式が成立する。

$$\dot{x} = r\dot{\theta} \quad \rightarrow \quad \ddot{x} = r\ddot{\theta} \qquad \text{---}\ (3)$$

式(1), (3)を式(2)に代入すると，

$$\frac{mr}{2}\left(g - \frac{T}{m}\right) = Tr \quad \rightarrow \quad T = \frac{1}{3}mg \qquad \text{---}\ (4)$$

式(4)を式(1)に代入すると，

$$\ddot{x} = \frac{2}{3}mg$$