機械力学　第3章

演習問題Ａの解答

3-A1　図3-1に示すばね-質量系において，m = 2kg，k = 100 N/m であるとき，振動系の固有角振動数 ω_n [rad/s]と周期 T_n [s]を求めよ。

解）式3-14において，

$$\omega_n = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{\frac{100}{2}} \cong 7.071 \text{ rad/s} \text{ である。}$$

よって，$f_n = \frac{\omega_n}{2\pi} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{100}{2}} \cong 1.125 \text{ Hz}$，$T_n = \frac{1}{f_n} \cong 0.889 \text{ s}$ となる。

3-A2　長さが200㎜の単振り子の固有振動数 f_n [Hz]を求めよ。

解）式3-22より

$$f_n = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{g}{l}} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{9.81}{0.2}} \cong 1.115 \text{ Hz} \text{ となる。}$$

3-A3　図3-7に示すねじり振動系において，I = 5.5×10^{-2}kgm^2，K_t =2.2×10^4 Nm/rad であるとき，振動系の固有振動数 f_n [Hz]と周期 T_n [s]を求めよ。

解）式3-30より

$$\omega_n = \sqrt{\frac{K_t}{I}} = \sqrt{\frac{2.2\times10^4}{5.5\times10^{-2}}} \cong 632.456 \text{ rad/s である。}$$

よって，$f_n = \frac{\omega_n}{2\pi} \cong 100.658\text{Hz}$，$T_n = \frac{1}{f_n} \cong 9.935\times10^{-3}\text{s}$ となる。

3-A4　図3-8に示すばね-質量-ダンパ系において，m= 1kg，k=10000 N/m，c=10[Ns/m]であるとき，振動系の減衰固有振動数 f_d [Hz]と減衰比 ζ を求めよ。

解）式3-39より

$$\zeta = \frac{c}{2\sqrt{mk}} = \frac{10}{2\sqrt{1\times10000}} = 0.05 \text{ を得る。式3-50より，}$$

$$f_d = \frac{1}{2\pi}\sqrt{1-\zeta^2}\,\omega_n = \frac{1}{2\pi}\sqrt{1-0.05^2}\sqrt{\frac{10000}{1}} \cong 15.896\text{Hz} \text{ となる。}$$

演習問題Ｂの解答

3-B1　図3-8に示すばね-質量-ダンパ系において，m= 5kg，k=200 N/m，c=10 Ns/m であるとき，初期条件 $x(0)$=0.1m，$v(0)$=0.01m/s として，自由振動の解を求めよ。

解）まず，減衰比 ζ を求める。

式3-39より

$\zeta = \frac{c}{2\sqrt{mk}} = \frac{10}{2\sqrt{5\times200}} \cong 0.158$ を得る。$0<\zeta<1$であるので，解 $x(t)$は，式3-46で与えられる。ここで，式3-50より，

$$\omega_d = \sqrt{1-\zeta^2}\,\omega_n = \sqrt{1-0.158^2}\sqrt{\frac{200}{5}} = 0.987\times6.325 \cong 6.245\text{rad/s} \text{ となる。}$$

よって式3-46は，

$x(t) = e^{-0.158\times6.325t}\left(0.1\cos6.245t + \frac{0.01+0.158\times6.325\times0.1}{6.245}\sin6.245t\right)$

$\quad = e^{-t}(0.1\cos6.245t + 0.0176\sin6.245t) \cong e^{-t}(0.1\cos6.245t + 0.018\sin6.245t)$

となる。

3-B2　図 3-8 に示すばね-質量-ダンパ系において，m= 1kg，k=10kN/m，c=100 Ns/m であるとき，振動系の減衰比 ζ と 対数減衰率 δ を求めよ。

解）まず，減衰比 ζ を求める。

式 3-39 より

$\zeta = \frac{c}{2\sqrt{mk}} = \frac{100}{2\sqrt{1\times10000}} = 0.5$ を得る。これを式 3-54 に代入して，

$\delta = \frac{2\pi\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}} = \frac{2\times\pi\times0.5}{\sqrt{1-0.5^2}} \cong 3.628$ となる。

3-B3　図アに示すように液体の中に慣性モーメント I [kgm^2]の円板が浸され，円板と壁が弾性軸で結合されたねじり振動系がある。初期回転変位 θ_0 [rad]を与えて，静かに放す(角速度 ω_0＝0rad/s)。自由振動の運動方程式，固有角振動数，減衰比，応答を求めよ。ただし，ねじりばねのねじり剛性 K_t[Nm/rad]は，横弾性係数を G[N/m^2]として，$K_t = \pi Gd^4/(32l)$　と表される。また，ねじり減衰係数を c_t [Nms/rad]，ねじりばねの慣性モーメントは円板のそれと比較して，無視できるものとする。

解）自由振動の運動方程式は，次式となる。

$I\ddot{\theta} + c_t\dot{\theta} + K_t\theta = 0$

１）0＜ζ＜1 の場合

直線系の質量-バネ-ダンパ系の運動方程式 3-32 と比較して，

非減衰固有角振動数 $\omega_n = \sqrt{\frac{K_t}{I}} = \sqrt{\frac{\pi Gd^4}{32lI}} = \frac{d^2}{4}\sqrt{\frac{\pi G}{2lI}}$

減衰固有角振動数 $\omega_d = \sqrt{1-\zeta^2}\omega_n$

減衰比 $\zeta = \frac{c_t}{c_c} = \frac{c_t}{2\sqrt{IK_t}} = \frac{c_t}{2}\sqrt{\frac{32l}{\pi Gd^4I}} = \frac{2c_t}{d^2}\sqrt{\frac{2l}{\pi GI}}$　となる。

応答は，$\theta(t) = e^{-\zeta\omega_n t}\left(\theta_0\cos\sqrt{1-\zeta^2}\omega_n t + \frac{\omega_0+\zeta\omega_n\theta_0}{\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}}\sin\sqrt{1-\zeta^2}\omega_n t\right)$　となるが，初期条件 $\omega_0 = 0$ を代入して，

$$\theta(t) = \theta_0 e^{-\zeta\omega_n t}\left(\cos\sqrt{1-\zeta^2}\omega_n t + \frac{\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}}\sin\sqrt{1-\zeta^2}\omega_n t\right)$$

が得られる。

２）ζ＝1 の場合

非減衰固有角振動数 ω_n と　減衰比 ζ は，上記１）の場合と同じに表される。

応答は，式 3-44 より，

$$\theta(t) = (D_1 + D_2 t)exp(-\omega_n t) \quad ①$$

となる。この式の両辺を時間で微分して，

$$\dot{\theta}(t) = (D_2 - \omega_n D_1 - \omega_n D_2 t)exp(-\omega_n t) \quad ②$$

となる。式①，②に初期条件として，$\theta(0) = \theta_0$，$\dot{\theta}(0) = \omega_0$ とおくと，$\theta_0 = D_1$，$\omega_0 = D_2 - \omega_n D_1$ を得る。よって，$D_2 = \omega_0 + \omega_n\theta_0$　となる。ここでは，$\omega_0 = 0$ であるので，応答①は，

$$\theta(t)=\theta_0(1+\omega_n t)exp(-\omega_n t)=\theta_0(1+\omega_n t)e^{-\omega_n t}$$

となる。

3）$\zeta>1$ の場合

非減衰固有角振動数 ω_n と　減衰比 ζ は，上記１）の場合と同じに表される。

上記２）と同様に，応答は式 3-43 より

$$\theta(t)=D_1 exp\left\{\left(-\zeta+\sqrt{\zeta^2-1}\right)\omega_n t\right\}+D_2 exp\left\{\left(-\zeta-\sqrt{\zeta^2-1}\right)\omega_n t\right\} \qquad ①$$

となる。この式の両辺を時間で微分して，

$$\dot{\theta}(t)=\left(-\zeta+\sqrt{\zeta^2-1}\right)\omega_n D_1 exp\left\{\left(-\zeta+\sqrt{\zeta^2-1}\right)\omega_n t\right\}$$
$$+\left(-\zeta-\sqrt{\zeta^2-1}\right)\omega_n D_2 exp\left\{\left(-\zeta-\sqrt{\zeta^2-1}\right)\omega_n t\right\} \qquad ②$$

を得る。式①，②に初期条件として，$\theta(0)=\theta_0$，$\dot{\theta}(0)=\omega_0$ とおくと，

$$\theta_0=D_1+D_2 \qquad ③$$

$$\omega_0=\left(-\zeta+\sqrt{\zeta^2-1}\right)\omega_n D_1+\left(-\zeta-\sqrt{\zeta^2-1}\right)\omega_n D_2 \qquad ④$$

を得る。式③，④を行列で表すと，次式のようになる。

$$\begin{bmatrix}\theta_0\\ \omega_0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 1\\ \left(-\zeta+\sqrt{\zeta^2-1}\right)\omega_n & \left(-\zeta-\sqrt{\zeta^2-1}\right)\omega_n\end{bmatrix}\begin{bmatrix}D_1\\ D_2\end{bmatrix} \qquad ⑤$$

よって，

$$\begin{bmatrix}D_1\\ D_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 1\\ \left(-\zeta+\sqrt{\zeta^2-1}\right)\omega_n & \left(-\zeta-\sqrt{\zeta^2-1}\right)\omega_n\end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix}\theta_0\\ \omega_0\end{bmatrix}$$

$$=\frac{-1}{2\omega_n\sqrt{\zeta^2-1}}\begin{bmatrix}\left(-\zeta-\sqrt{\zeta^2-1}\right)\omega_n & -1\\ -\left(-\zeta+\sqrt{\zeta^2-1}\right)\omega_n & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\theta_0\\ \omega_0\end{bmatrix}=\frac{1}{2\omega_n\sqrt{\zeta^2-1}}\begin{bmatrix}\left(\zeta+\sqrt{\zeta^2-1}\right)\omega_n\theta_0+\omega_0\\ \left(-\zeta+\sqrt{\zeta^2-1}\right)\omega_n\theta_0-\omega_0\end{bmatrix} \qquad ⑥$$

となる。ここでは，$\omega_0=0$ であるので，

$$\begin{bmatrix}D_1\\ D_2\end{bmatrix}=\frac{1}{2\sqrt{\zeta^2-1}}\begin{bmatrix}\left(\zeta+\sqrt{\zeta^2-1}\right)\theta_0\\ \left(-\zeta+\sqrt{\zeta^2-1}\right)\theta_0\end{bmatrix} \qquad ⑦$$

となる。よって，応答①は，

$$\theta(t)=D_1 exp\left\{\left(-\zeta+\sqrt{\zeta^2-1}\right)\omega_n t\right\}+D_2 exp\left\{\left(-\zeta-\sqrt{\zeta^2-1}\right)\omega_n t\right\}$$
$$=\frac{\left(\zeta+\sqrt{\zeta^2-1}\right)\theta_0}{2\sqrt{\zeta^2-1}}e^{\left(-\zeta+\sqrt{\zeta^2-1}\right)\omega_n t}+\frac{\left(-\zeta+\sqrt{\zeta^2-1}\right)\theta_0}{2\sqrt{\zeta^2-1}}e^{\left(-\zeta-\sqrt{\zeta^2-1}\right)\omega_n t} \qquad ⑧$$

となる。