4-A1

振動系の角固有振動数ω_n、減衰比ζと静たわみX_{st}は次のように求まる。

$$\omega_n = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{\frac{800}{0.5}} = 40 \quad \text{rad/s}$$

$$\zeta = \frac{c}{2m\omega_n} = \frac{2}{2\times0.5\times40} = 0.05$$

$$X_{st} = \frac{F}{k} = \frac{50}{800} = 0.0635 \quad \text{m}$$

これらの値を用いて、変位の振幅Xは

$$X = \frac{X_{st}}{\sqrt{\left\{1-\left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2\right\}^2 + (2\varsigma\frac{\omega}{\omega_n})^2}} = \frac{0.625}{\sqrt{\left\{1-\left(\frac{20}{40}\right)^2\right\}^2 + (2\times0.05\times\frac{20}{40})^2}} \approx 8.31\times10^{-2} \quad \text{m}$$

と求められる。

位相ϕは

$$\phi = \tan^{-1}\frac{2\varsigma\frac{\omega}{\omega_n}}{1-\left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2} = \tan^{-1}\frac{2\times0.05\times\frac{20}{40}}{1-\left(\frac{20}{40}\right)^2} = 3.81^\circ$$

と求められる。

4-A2

調和外力の角周波数ωは

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{0.2} = 10\pi \quad \text{rad/s}$$

定常状態の変位の式は

$$x_p = X\sin(\omega t - \phi)$$

となるので、定常状態の速度と加速度の式は

$$\dot{x}_p = \omega X\cos(\omega t - \phi)$$

$$\ddot{x}_p = -\omega^2 X\sin(\omega t - \phi)$$

と求まる。したがって速度振幅X_Vと加速度振幅X_Aは

$$X_V = \omega X = 10\pi\times5\times10^{-2} \approx 1.57 \quad \text{m/s}$$

$$X_A = \omega^2 X = (10\pi)^2\times5\times10^{-2} \approx 4.937 \quad \text{m/s}^2$$

として求まる。

4-A3

非減衰系の強制振動の変位の一般解は

$$x(t) = A\cos\omega_n t + B\sin\omega_n t + X\sin\omega t$$

$$X = \frac{X_{st}}{1-\left(\dfrac{\omega}{\omega_n}\right)^2}$$

で与えられる。初期値は，静止している質量に外力が作用したので， $x(0)=0$, $\dot{x}(0)=0$ となる。

変位の初期条件から

$$x(0) = A\cos\omega_n 0 + B\sin\omega_n 0 + X\sin\omega 0$$

となり，変数 A は

$$A = 0$$

と求まる。速度の初期条件から

$$\dot{x}(0) = -\omega_n A\sin\omega_n 0 + \omega_n B\cos\omega_n 0 + \omega X\cos\omega 0$$

となり，変数 B は

$$B = \frac{-\omega}{\omega_n} X$$

として求まる。したがって変位は

$$x(t) = \frac{-\omega}{\omega_n}\frac{X_{st}}{1-\left(\dfrac{\omega}{\omega_n}\right)^2}\sin\omega_n t + \frac{X_{st}}{1-\left(\dfrac{\omega}{\omega_n}\right)^2}\sin\omega t$$

となる。固有角振動数 ω_n と静たわみ X_{st} は

$$\omega_n = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{\frac{200}{0.5}} = 20 \quad \text{rad/s}$$

$$X_{st} = \frac{F}{k} = \frac{10}{200} = 0.05 \quad \text{m}$$

と求まるので，これらの値を代入すると，変位応答は

$$x(t) = \frac{-60}{20}\frac{0.05}{1-\left(\dfrac{60}{20}\right)^2}\sin 20t + \frac{0.05}{1-\left(\dfrac{60}{20}\right)^2}\sin 60t$$

$$= 1.875\times10^{-2}\sin 20t - 6.25\times10^{-3}\sin 60t$$

として求まる。

4-A4

粘性減衰系の強制振動の変位の一般解は

$$x(0)=e^{-\varsigma\omega_n t}\left(A\cos\omega_d t+B\sin\omega_d t\right)+X\sin(\omega t-\phi)$$

$$X=\frac{X_{st}}{\sqrt{\left\{1-\left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2\right\}^2+(2\varsigma\frac{\omega}{\omega_n})^2}}\qquad \phi=\tan^{-1}\frac{2\varsigma\frac{\omega}{\omega_n}}{1-\left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2}\qquad \omega_d=\omega_n\sqrt{1-\varsigma^2}$$

で与えられる。初期値は，静止している質量に外力が作用したので， $x(0)=0$，$\dot{x}(0)=0$ となる。この条件における変位は式(4-30)で求めてあり，次式で表される。

$$x(t)=e^{-\varsigma\omega_n t}\left[X\sin\phi\cos\omega_d t-\frac{X}{\omega_d}(\varsigma\omega_n\sin\phi-\omega\cos\phi)\sin\omega_d t\right]$$
$$+X\sin(\omega t-\phi)$$

振動系の角固有振動数 ω_n、減衰比 ζ と静たわみ X_{st} は次のように求まる。

$$\omega_n=\sqrt{\frac{k}{m}}=\sqrt{\frac{800}{2}}=20\quad \text{rad/s}$$

$$\zeta=\frac{c}{2m\omega_n}=\frac{2}{2\times2\times20}=0.1$$

$$X_{st}=\frac{F}{k}=\frac{160}{800}=0.2\quad \text{m}$$

これらの値を代入すると，変位応答は

$$x(t)=e^{-2t}\left(\cos19.9t-\frac{2}{19.9}\sin19.9t\right)-\cos20t$$

として求まる。

4-B4

図より運動方程式は

$$m\ddot{x}+c\dot{x}+kx=F\cos\omega t$$

となる。さらに，両辺を質量 m で割ることで次式が得られる。

$$\ddot{x}+2\varsigma\omega_n\dot{x}+\omega_n^2x=\frac{F}{m}\cos\omega t$$

特解を

$$x_p=C\cos\omega t+D\sin\omega t$$

と仮定して，上の式に代入すると

$$\left\{C(\omega_n{}^2-\omega^2)+2\varsigma\omega_n\omega D\right\}\cos\omega t+\left\{D(\omega_n{}^2-\omega^2)-2\varsigma\omega_n\omega C\right\}\sin\omega t=\frac{F}{m}\sin\omega t$$

が得られる。両辺の係数比較により C と D を求めると

$$C=\frac{(\omega_n{}^2-\omega^2)F}{m\left\{(\omega_n{}^2-\omega^2)^2+(2\varsigma\omega_n\omega)^2\right\}}$$

$$D=\frac{2\varsigma\omega_n\omega F}{m\left\{(\omega_n{}^2-\omega^2)^2+(2\varsigma\omega_n\omega)^2\right\}}$$

となる。得られた係数CとDを仮定した特解の式に代入すると

$$x_p=\frac{F}{m\left\{(\omega_n{}^2-\omega^2)^2+(2\varsigma\omega_n\omega)^2\right\}}\left\{(\omega_n{}^2-\omega^2)\cos\omega t+2\varsigma\omega_n\omega\sin\omega t\right\}$$

となる。さらに整理すると

$$x_p=\frac{X_{st}}{\sqrt{\left\{1-\left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2\right\}^2+(2\varsigma\frac{\omega}{\omega_n})^2}}\cos(\omega t-\phi)$$

$$\phi=\tan^{-1}\frac{2\varsigma\frac{\omega}{\omega_n}}{1-\left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2}$$

と求まる。

4-B5

グラフより変位$x(t)$は外力$f(t)$に対してt_l=0.015s だけ遅れていることが読み取れる。また，外力のグラフより周期はT=0.25s と読み取れる。従って，位相差ϕは

$$\phi=t_l\omega=t_l\times2\pi\frac{1}{T}=0.015\times2\pi\frac{1}{0.25}\approx3.77\quad\text{rad}$$

として求まる。また，位相差ϕは

$$\phi=\tan^{-1}\frac{2\varsigma\frac{\omega}{\omega_n}}{1-\left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2}$$

も満足するので，この式を減衰比について解くと

$$\varsigma=\frac{\left\{1-\left(\frac{4}{5}\right)^2\right\}\tan3.77}{2\frac{5}{5}}\approx0.0891$$

と求まる。次に定常振動の振幅の式からばね定数kは

$$k=\frac{\frac{F}{X}}{\sqrt{\left\{1-\left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2\right\}^2+(2\varsigma\frac{\omega}{\omega_n})^2}}$$

となる。グラフより，変位振幅X=0.01m，外力の振幅F=10N と読み取れるので，これらの値を代入すると

$$k=\frac{\dfrac{10}{0.01}}{\sqrt{\left\{1-\left(\dfrac{4}{5}\right)^2\right\}^2+\left(2\times 0.0891\times\dfrac{4}{5}\right)^2}}\approx 2583 \quad \text{N/m}$$

と求まる。質量は固有角振動数の式より

$$m=\frac{k}{\omega_n^2}=\frac{2583}{(5\times 2\pi)^2}\approx 2.62 \quad \text{kg}$$

と求まる。