5-A1

(1)

振動系の角固有振動数ω_n、減衰比ζは次のように求まる。

$$\omega_n = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{\frac{1600}{1.2}} \approx 36.51 \quad \mathrm{rad/s}$$

$$\zeta = \frac{c}{2\sqrt{mk}} = \frac{14}{2\sqrt{1.2\times 1600}} \approx 0.1598$$

これらの値を用いて、変位の振幅比の最大値は

$$\frac{X_{\max}}{X_{st}} = \frac{1}{2\zeta\sqrt{1-\zeta^2}} = \frac{1}{2\times 0.1598\sqrt{1-0.1598^2}} \approx 3.17$$

と求められる。

共振振動数ω_pは

$$\omega_p = \omega_n\sqrt{1-\zeta^2} = 36.51\sqrt{1-0.1598^2} \approx 35.6 \quad \mathrm{rad/s}$$

と求められる。

(2)

振動系の角固有振動数ω_n、減衰比ζは(1)で求めた値を用いて、速度振幅比の最大値は

$$\frac{X_{V\max}}{\omega X_{st}} = \frac{1}{2\zeta} = \frac{1}{2\times 0.1598} \approx 3.13$$

と求められる。

速度振幅比の共振振動数ω_pは固有角振動数と等しいので

$$\omega_p = \omega_n \approx 36.5 \quad \mathrm{rad/s}$$

と求められる。

(3)

振動系の角固有振動数ω_n、減衰比ζは(1)で求めた値を用いて、加速度振幅比の最大値は

$$\frac{X_{A\max}}{\omega^2 X_{st}} = \frac{1}{2\zeta\sqrt{1-\zeta^2}} = \frac{1}{2\times 0.1598\sqrt{1-0.1598^2}} \approx 3.17$$

と求められる。変位振幅比の最大値と同じになる。

加速度振幅比の共振振動数ω_pは固有角振動数と等しいので

$$\omega_p = \frac{\omega_n}{\sqrt{1-2\zeta^2}} = \frac{36.51}{\sqrt{1-2\times 0.1598^2}} \approx 37.5 \quad \mathrm{rad/s}$$

と求められる。

5-A2

振動系の角固有振動数ω_n、減衰比ζは次のように求まる。

$$\omega_n = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{\frac{1200}{3}} = 20 \quad \text{rad/s}$$

$$\zeta = \frac{c}{2\sqrt{mk}} = \frac{2}{2\sqrt{3\times 1200}} = \frac{1}{60} \approx 0.01667$$

これらの値を用いて、$\omega = 3\,\text{rad/s}$のときの変位振幅比は

$$\frac{X}{X_{ST}} = \frac{1}{\sqrt{(1-\Omega^2)^2 + (2\varsigma\Omega)^2}} = \frac{1}{\sqrt{\left\{1-\left(\frac{3}{20}\right)^2\right\}^2 + \left(2\times\frac{1}{60}\times\frac{3}{20}\right)^2}} = 1.05$$

と求められる。位相は

$$\phi = \tan^{-1}\frac{2\varsigma\Omega}{1-\Omega^2} = \tan^{-1}\frac{2\times\frac{1}{60}\times\frac{3}{20}}{1-\left(\frac{3}{20}\right)^2} \approx 5.12\times 10^{-3}$$ 。

と求められる。

5-A3

図アより，速度振幅値が最大値の$1/\sqrt{2}$になるときの振動数比Ω_1とΩ_2は

$\Omega_1 = 0.951$、$\Omega_2 = 1.051$

と読み取れる。

速度振幅比から減衰比を求める式は

$$\varsigma = \frac{\omega_2 - \omega_1}{2\omega_n} = \frac{\Omega_2 - \Omega_1}{2}$$

で与えられるので、グラフから読み取った値を代入すると減衰比は

$$\varsigma = \frac{\Omega_2 - \Omega_1}{2} = \frac{1.051 - 0.951}{2} = 0.05$$

として求まる。

5-B1

振動系の減衰比ζは次のように求まる。

$$\zeta = \frac{c}{2\sqrt{mk}} = \frac{8}{2\sqrt{0.5\times 800}} = 0.2$$

求めた振幅比をから変位振幅比の最大値と共振の振動数比Ω_pは次式で求められる。

$$\frac{X_{\max}}{X_{st}} = \frac{1}{2\zeta\sqrt{1-\zeta^2}} = \frac{1}{2\times 0.2\sqrt{1-0.2^2}} \approx 2.55$$

$$\Omega_p = \sqrt{1-2\zeta^2} = \sqrt{1-2\times 0.2^2} \approx 0.959$$

変位振幅比の式は

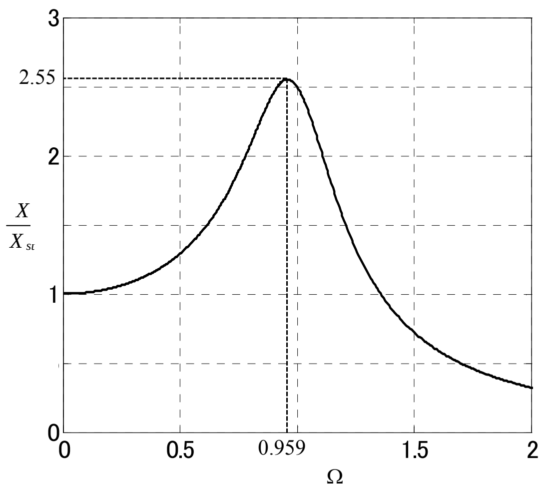
$$\frac{X}{X_{ST}} = \frac{1}{\sqrt{(1-\Omega^2)^2 + (2\varsigma\Omega)^2}}$$

で表されるので、$\Omega = 0$と$\Omega = \infty$のときの変位振幅比は

$$\left.\frac{X}{X_{ST}}\right|_{\Omega=0} = \frac{1}{\sqrt{(1-0^2)^2 + (2\varsigma\times 0)^2}} = 1$$

$$\left.\frac{X}{X_{ST}}\right|_{\Omega=\infty} = 0$$

となる。これらの値を元に，変位振幅比のグラフを描くと



となる。

5-B2

変位振幅比の最大値は次式で求められる。

$$\frac{X_{\max}}{X_{st}} = \frac{1}{2\zeta\sqrt{1-\zeta^2}}$$

まず、最大値が 3 になるときの減衰比ςを求める。

$$3=\frac{1}{2\zeta\sqrt{1-\zeta^2}}$$

両辺を二乗して整理すると

$$\zeta^4-\zeta^2+\frac{1}{36}=0$$

解の公式より

$$\zeta^2=\frac{1\pm\sqrt{(-1)^2-\frac{4}{36}}}{2}=\frac{1}{2}\pm\frac{\sqrt{2}}{3}$$

この結果より，正の減衰比として以下の二つの値が得られる。

$\zeta\approx 0.9856$

$\zeta\approx 0.1691$

振幅比が極致を持つための条件は

$0<\zeta<1/\sqrt{2}$

なので、$\zeta=0.1691$ が求める減衰比である。また、減衰比を大きくすると振幅比の最大値が小さくなることが分かっているので、最大値を 3 以下にするためには

$0.1691\leq\zeta$

とする必要がある。