機械力学　第 6 章

演習問題Ａの解答

6-A1　図 6－1 に示す 1 自由度振動系において, 固有角振動数が 60rad/s, 減衰比が 0.02 であった。質量に振幅 10kN で，加振振動数が 6.0rad/s　のときと，120.0rad/s のときの基礎への伝達力を求めよ。

解）式 6－9 より，基礎への伝達力 P は，加振振動数が 6.0rad/s　のとき，

$$P_6 = F\sqrt{\frac{(2\zeta\omega_n\omega)^2+\omega_n^4}{\left(\omega_n^2-\omega^2\right)^2+(2\zeta\omega_n\omega)^2}} = F\sqrt{\frac{1+\left(\frac{2\zeta\omega}{\omega_n}\right)^2}{\left\{1-\left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2\right\}^2+\left(\frac{2\zeta\omega}{\omega_n}\right)^2}} = 10000\times\sqrt{\frac{1+\left(\frac{2\cdot0.02\cdot6}{60}\right)^2}{\left\{1-\left(\frac{6}{60}\right)^2\right\}^2+\left(\frac{2\cdot0.02\cdot6}{60}\right)^2}}$$

$$\cong 1.010\times10^4\ \mathrm{N}\cong 10.1\ \mathrm{kN}$$

加振振動数が 120.0rad/s　のとき

$$P_{120} = F\sqrt{\frac{(2\zeta\omega_n\omega)^2+\omega_n^4}{\left(\omega_n^2-\omega^2\right)^2+(2\zeta\omega_n\omega)^2}} = F\sqrt{\frac{1+\left(\frac{2\zeta\omega}{\omega_n}\right)^2}{\left\{1-\left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2\right\}^2+\left(\frac{2\zeta\omega}{\omega_n}\right)^2}} = 10000\times\sqrt{\frac{1+\left(\frac{2\cdot0.02\cdot120}{60}\right)^2}{\left\{1-\left(\frac{120}{60}\right)^2\right\}^2+\left(\frac{2\cdot0.02\cdot120}{60}\right)^2}}$$

$$\cong 3.343\times10^3\ \mathrm{N}\cong 3.3\ \mathrm{kN}$$

となる。

6-A2　図 6－3 に示す 1 自由度振動系において, 固有角振動数が 50rad/s, 減衰比が 0.01 であった。基礎の部分の変位振幅が 5×10^{-3}m, 加振振動数が 10.0rad/s　のときの機械部の振動変位を求めよ。

解）式 6－15 より，機械部の振動変位 X_s は，加振振動数が 10.0rad/s　のとき，

$$X_s = Y\sqrt{\frac{(2\zeta\omega_n\omega)^2+\omega_n^4}{\left(\omega_n^2-\omega^2\right)^2+(2\zeta\omega_n\omega)^2}} = Y\sqrt{\frac{1+\left(\frac{2\zeta\omega}{\omega_n}\right)^2}{\left\{1-\left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2\right\}^2+\left(\frac{2\zeta\omega}{\omega_n}\right)^2}} = 5\times10^{-3}\times\sqrt{\frac{1+\left(\frac{2\cdot0.01\cdot10}{50}\right)^2}{\left\{1-\left(\frac{10}{50}\right)^2\right\}^2+\left(\frac{2\cdot0.01\cdot10}{50}\right)^2}}$$

$$\cong 5.208\times10^{-3}\ \mathrm{m}\ (\cong 5.2\ \mathrm{mm})$$

となる。

補遺：減衰比は 0.01 のままで，加振振動数を 75rad/s の場合を求めてみると，$X_s\cong 4.0\ \mathrm{mm}$　となる。

6-A3　例題 6-1 において，減衰比 ζ が 0.01 である場合について答えよ。

解）

力の伝達率は，式 6-9 でζ=0.01 として，

$$\sqrt{\frac{1+\left(\frac{2\zeta\omega}{\omega_n}\right)^2}{\{1-\left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2\}^2+\left(\frac{2\zeta\omega}{\omega_n}\right)^2}}\le 0.5 \qquad \frac{1+\left(\frac{0.02\omega}{\omega_n}\right)^2}{\{1-\left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2\}^2+\left(\frac{0.02\omega}{\omega_n}\right)^2}\le 0.25$$

と求められる。この式を整理すると，

$$\left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^4-2.0012\times\left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2-3\ge0$$

を得る。

$(\omega/\omega_n)^2>0$ であるから　$\left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2\ge3$　である。よって　$\frac{\omega}{\omega_n}\ge1.732$　となる。

調和変位入力の振動数が 15Hz であるから，$\omega=30\pi=94.248$rad/s　となる。したがって，

$\omega_n=\sqrt{\frac{k}{m}}\le\frac{30\pi}{\sqrt{3}}=54.414$ rad/s，質量 m が 75kg であるから，

$k \leq 54.414^2 \times 75 = 222066.099$ N/m が得られる。以上より，ばね定数を，222066.1 N/m 以下にすれば変位の伝達率を 0.5 以下にできることがわかる。

補遺：減衰比が 0.5 の場合について，同条件を満たすばね定数の値を求めてみる。
力の伝達率は，式 6-9 でζ=0.5 として，

$\sqrt{\frac{1+\left(\frac{2\zeta\omega}{\omega_n}\right)^2}{\{1-\left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2\}^2+\left(\frac{2\zeta\omega}{\omega_n}\right)^2}} \leq 0.5$　　$\frac{1+\left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2}{\{1-\left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2\}^2+\left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2} \leq 0.25$　と求められる。この式を整理すると，

$\left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^4 - 6 \times \left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2 - 3 \geq 0$　を得る。

$(\omega/\omega_n)^2 > 0$ であるから　$\left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2 \geq 3 + 2\sqrt{3}$　である。よって　$\frac{\omega}{\omega_n} \geq 2.542$　となる。

調和変位入力の振動数が 15Hz であるから，$\omega = 30\pi = 94.248$rad/s　となる。したがって，

$\omega_n = \sqrt{\frac{k}{m}} \leq \frac{30\pi}{2.542} = 37.070$ rad/s，質量 m が 75kg であるから，

$k \leq 37.070^2 \times 75 = 103061.235$ N/m が得られる。以上より，ばね定数を，103061.2 N/m 以下にすれば変位の伝達率を 0.5 以下にできることがわかる。

6-A4　例題 6-2 において，減衰比 ζ が 0 である場合について答えよ。
解）
ζ= 0 の場合，変位の伝達率は式 6-15 より，次のようになる。

$\frac{1}{\sqrt{\{1-\left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2\}^2}} \leq 0.25$　であるから　$\frac{1}{\{1-\left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2\}^2} \leq 0.0625$　よって，

$0.0625\left\{\left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^4 - 2\left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2 + 1\right\} \geq 1$　となり，

さらに $\left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^4 - 2\left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2 - 15 \geq 0$　を得る。

$(\omega/\omega_n)^2 > 0$　であるから　$\left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2 \geq 5$　となる。よって　$\frac{\omega}{\omega_n} \geq 2.236$　が求められる。

調和外力の振動数が 10Hz であるから，$\omega = 20\pi = 62.832$rad/s である。したがって，

$\omega_n = \sqrt{\frac{k}{m}} \leq \frac{20\pi}{\sqrt{5}} = 28.099$ rad/s が求められる。質量 m が 100kg であるから

$k \leq 28.099^2 \times 100 = 78956.835$ N/m となる。以上より，ばね定数を，78956.8 N/m 以下にすれば力の伝達率を 0.25 以下にできることがわかる。

6-A5　図アに示すような質量 m，ばね（ばね定数:k N/m），ダンパ（粘性減衰係数:c Ns/m）から成る振動系に，調和励振力（振幅 F_0＝100kN，加振振動数 f=10Hz）が作用したときの基礎に伝達される伝達力 P を求めよ。ただし，m=40kg，k=10kN/m，c=200Ns/m とする。

解）固有角振動数は，$\omega_n = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{\frac{10000}{40}} = 15.811$ rad/s

減衰比は，$\zeta = \frac{c}{2\sqrt{mk}} = \frac{200}{2\sqrt{40 \times 10000}} = 0.158$ である。

式 6－9 より，基礎への伝達力 P は，加振振動数が 10Hz = 62.832rad/s のとき，

$$P = F_0\sqrt{\frac{(2\zeta\omega_n\omega)^2+\omega_n^4}{\left(\omega_n^2-\omega^2\right)^2+(2\zeta\omega_n\omega)^2}} = F_0\sqrt{\frac{1+\left(\frac{2\zeta\omega}{\omega_n}\right)^2}{\left\{1-\left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2\right\}^2+\left(\frac{2\zeta\omega}{\omega_n}\right)^2}} = 100000\cdot\sqrt{\frac{1+\left(\frac{2\cdot0.158\cdot62.832}{15.811}\right)^2}{\left\{1-\left(\frac{62.832}{15.811}\right)^2\right\}^2+\left(\frac{2\cdot0.158\cdot62.832}{15.811}\right)^2}}$$

$\cong 1.082\times10^4\ \mathrm{N}\cong 10.8\ \mathrm{kN}$となる。

演習問題 B の解答

6-B1　図イに示すような 1 自由度の車体 M が，正弦波状（凹凸の振幅が 2cm，波長が 4m）の路面を走行している。M = 250kg，k = 2.5×10³ N/m，c =0 Ns/m　とするとき，以下の問いに答えよ。

1)車体系が共振状態になる速度 v m/s を求めよ。

2)車体が次の時速で走行しているとき，車体の振幅がいくらになるか求めよ。

a)40km/h　　　b)100km/h

解）

１）図 6-3 と同様に，車体 M の座標 x ならびに路面の変化 y を定める。路面変化 y は，

$y = 0.02\sin\omega t$ m で表される。ここで，路面変化の角振動数 ω は車体の速度を v m/s とすると，

$\omega = 2\pi f = 2\pi\frac{v}{\lambda} = 2\pi\frac{v}{4} = 0.5\pi v$ で表される。車体 M の運動方程式は，

$M\ddot{x} + c(\dot{x}-\dot{y}) + k(x-y) = 0$ で表される。両辺を M で除して，式 6-12 と同じ

$$\ddot{x} + 2\zeta\omega_n\dot{x} + \omega_n^2 x = 2\zeta\omega_n\dot{y} + \omega_n^2 y$$
$$= 2\zeta\omega_n\omega Y\cos\omega t + \omega_n^2 Y\sin\omega t$$

を得る。いま，$\mathrm{c}=0$であるので，固有振動数ω_nは，

$\omega_n = \sqrt{\frac{k}{M}} = \sqrt{\frac{2.5\times10^3}{250}} = 3.1623\mathrm{rad/s}$ と求まる。よって$v = \frac{\omega_n}{0.5\pi} = 2.0132\mathrm{m/s}(\cong 7.247\mathrm{km/h})$ となる。

２）問題 6-A2 と同様に考えることができる。車体の振幅を X_s とすると，

$$X_s = Y\sqrt{\frac{(2\zeta\omega_n\omega)^2+\omega_n^4}{\left(\omega_n^2-\omega^2\right)^2+(2\zeta\omega_n\omega)^2}} = Y\sqrt{\frac{1+\left(\frac{2\zeta\omega}{\omega_n}\right)^2}{\left\{1-\left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2\right\}^2+\left(\frac{2\zeta\omega}{\omega_n}\right)^2}}$$ と表される。

a)40km/h

このとき　$\omega = 0.5\pi v = 0.5\pi\times\frac{40\times1000}{3600}$= 17.453 rad/s となる。$Y$=0.02m，$\zeta$=0 を代入して，

$$X_s = Y\sqrt{\frac{1+\left(\frac{2\zeta\omega}{\omega_n}\right)^2}{\left\{1-\left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2\right\}^2+\left(\frac{2\zeta\omega}{\omega_n}\right)^2}} = 0.02\times\sqrt{\frac{1}{\left\{1-\left(\frac{17.453}{3.163}\right)^2\right\}^2}} = 6.788\times10^{-4}\mathrm{m}\ (=0.68\mathrm{mm})$$ となる。

b)100km/h

このとき　$\omega = 0.5\pi v = 0.5\pi\times\frac{100\times1000}{3600}$= 43.633 rad/s であるから

$$X_s = 0.02\times\sqrt{\frac{1}{\left\{1-\left(\frac{43.633}{3.163}\right)^2\right\}^2}} = 1.056\times10^{-4}\ \mathrm{m}\ (=\ 0.11\mathrm{mm})$$ となる。

6-B2　問題 6-B1 において，c=16.0 Ns/m の場合について，解答せよ。
解）

1）$c = 16.0$ Ns/m であるので，減衰比$\zeta = \frac{c}{2\sqrt{Mk}} = \frac{16.0}{2\sqrt{250\times2.5\times10^3}} = 0.010$ である。よって，減衰固有振動数は，$\omega_d = \sqrt{1-\zeta^2}\omega_n = 0.9999\times3.1623 \cong 3.1621$ と求まる。
よって，$v = \frac{\omega_d}{0.5\pi} = 2.0131\mathrm{m/s}\ (\cong 7.247\ \mathrm{km/h})$　となる。

補遺）ここで，$c = 160.0$ Ns/m の場合を考えてみると，減衰比$\zeta = \frac{c}{2\sqrt{Mk}} = \frac{160.0}{2\sqrt{250\times2.5\times10^3}} = 0.101$ である。よって，減衰固有振動数は，$\omega_d = \sqrt{1-\zeta^2}\omega_n = 0.9949\times3.162 = 3.146$ と求まる。よって，$v = \frac{\omega_d}{0.5\pi} = 2.003\mathrm{m/s}$ =7.210km/h　となる。

2）問題 6-A2 と同様に考えることができる。車体の振幅を X_s とすると，

$$X_s = Y\sqrt{\frac{(2\zeta\omega_n\omega)^2+\omega_n^4}{\left(\omega_n^2-\omega^2\right)^2+(2\zeta\omega_n\omega)^2}} = Y\sqrt{\frac{1+\left(\frac{2\zeta\omega}{\omega_n}\right)^2}{\left\{1-\left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2\right\}^2+\left(\frac{2\zeta\omega}{\omega_n}\right)^2}}$$ と表される。

a) 40km/h

このとき，$\omega = 0.5\pi v = 0.5\pi\times\frac{40\times1000}{3600}$= 17.453 rad/s となる。$Y$=0.02m，$\zeta$=0.010 を代入して，

$$X_s = Y\sqrt{\frac{1+\left(\frac{2\zeta\omega}{\omega_n}\right)^2}{\left\{1-\left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2\right\}^2+\left(\frac{2\zeta\omega}{\omega_n}\right)^2}} = 0.02\times\sqrt{\frac{1+\left(\frac{2\times0.010\times17.453}{3.162}\right)^2}{\left\{1-\left(\frac{17.453}{3.162}\right)^2\right\}^2+\left(\frac{2\times0.010\times17.453}{3.162}\right)^2}} = 6.831\times10^{-4}$$ m となる。

b) 100km/h

このとき　$\omega = 0.5\pi v = 0.5\pi\times\frac{100\times1000}{3600}$= 43.633 rad/s であるから

$$X_s = Y\sqrt{\frac{1+\left(\frac{2\zeta\omega}{\omega_n}\right)^2}{\left\{1-\left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2\right\}^2+\left(\frac{2\zeta\omega}{\omega_n}\right)^2}} = 0.02\times\sqrt{\frac{1+\left(\frac{2\times0.010\times43.633}{3.162}\right)^2}{\left\{1-\left(\frac{43.633}{3.162}\right)^2\right\}^2+\left(\frac{2\times0.010\times43.633}{3.162}\right)^2}} = 1.096\times10^{-4}$$ m となる。

6-B3　図ウに示すように，質量 M の回転機械がばね（ばね定数:k N/m）とダンパー（粘性減衰係数:c Ns/m）によって支持されている。回転機械の回転部分に不釣合い me が存在する。定常状態での回転機械の応答を調べ，応答曲線を図示せよ。ここで，m は回転質量，e は偏心量である。
解）回転機械の変位 x の正方向は，図ウにおいて上向きとする。また，回転部分の質量 m は，機械の質量 M に含まれるものとする。

不釣合い me により発生する遠心力 $me\omega^2$ の x 方向の成分は，$me\omega^2\sin\omega t$ であるので，運動方程式は，

$$M\ddot{x} + c\dot{x} + kx = me\omega^2\sin\omega t \qquad ①$$

となる。回転機械の定常応答 x_{st} は，式 6-1～6-3 において，質量 m を M，外力 F を $me\omega^2$ とおくことで，

$x_{st} = X_{st}\sin(\omega t-\phi)$　と表される。ここで，固有角振動数$\omega_n = \sqrt{\frac{k}{M}}$，減衰比$\zeta = \frac{c}{2\sqrt{Mk}}$，質量比$\gamma = \frac{m}{M}$　とおくと，

$$X_{st} = \frac{me\omega^2}{k\sqrt{(\omega_n^2-\omega^2)^2+(2\zeta\omega_n\omega)^2}} = \frac{me}{Mk}\frac{M\omega^2}{\sqrt{(\omega_n^2-\omega^2)^2+(2\zeta\omega_n\omega)^2}} = \frac{\gamma e(\frac{\omega}{\omega_n})^2}{\sqrt{\{1-\left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2\}^2+\left(\frac{2\zeta\omega}{\omega_n}\right)^2}},$$

$$\phi = \tan^{-1}\left(\frac{2\zeta\omega_n\omega}{\omega_n^2-\omega^2}\right) = \tan^{-1}\left\{\frac{2\zeta\frac{\omega}{\omega_n}}{1-\left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2}\right\}$$ となる。

応答の振幅を改めて，$\frac{X_{st}}{\gamma e} = \frac{(\frac{\omega}{\omega_n})^2}{\sqrt{\{1-\left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2\}^2+\left(\frac{2\zeta\omega}{\omega_n}\right)^2}}$ をとると，応答曲線は下図のようになる。

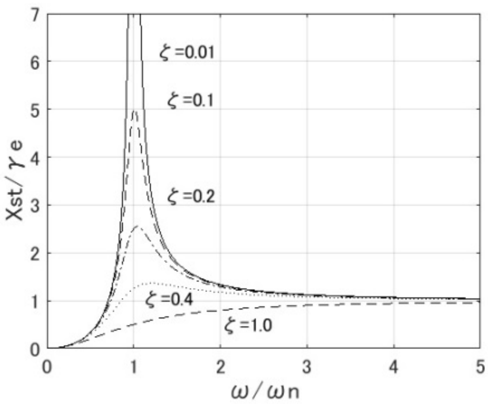

図　不釣合いのある回転体の振動