機械力学　Let's Try！

6章

1）*1 について

図 6-1 に示す粘性減衰系の運動法方程式は，式 4-13 と同様に次式で表される。

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = F\sin\omega t \qquad ①$$

定常振動における解を，$x = C\cos\omega t + D\sin\omega t$ とおいて求める方法は，式 4-14～4-24 に示されている。ここでは，複素ベクトルを用いる方法を述べる。式①の外力の代わりに，複素数で表示すると，

$$f(t) = Fe^{j\omega t}$$

となる。式①は，x を複素数と考えて

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = Fe^{j\omega t} \qquad ②$$

となる。式①の解は，式②の虚部であると考えればよい。

式②の両辺を m で割ると，次式を得る。

$$\ddot{x} + 2\zeta\omega_n\dot{x} + \omega_n^2 x = X_{st}\omega_n^2 e^{j\omega t} \qquad ③$$

ただし，$X_{st}=F/k$，$\omega_n{}^2=k/m$ である。式③の特解を，

$$x = X_s e^{j\omega t} \qquad ④$$

と考えて式③に代入し，さらに両辺を $e^{j\omega t}$ で割ると，

$$\{(\omega_n^2 - \omega^2) + 2\zeta\omega_n j\}X_s = X_{st}\omega_n^2 \qquad ⑤$$

となる。よって，次式を得る。

$$X_s = \frac{X_{st}\omega_n^2}{(\omega_n^2-\omega^2)+2\zeta\omega_n j} = \frac{X_{st}}{1-\left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2+2\zeta\left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)j} = \frac{X_{st}\left\{1-\left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2-2\zeta\left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)j\right\}}{\left\{1-\left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2\right\}^2+\left\{2\zeta\left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)\right\}^2} = \frac{X_{st}}{\sqrt{\left\{1-\left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2\right\}^2+\left\{2\zeta\left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)\right\}^2}}e^{-j\phi} \qquad ⑥$$

式⑥を式④に代入して，

$$x = \frac{X_{st}}{\sqrt{\left\{1-\left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2\right\}^2+\left\{2\zeta\left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)\right\}^2}}e^{j(\omega t-\phi)} \qquad ⑦$$

と求まる。式⑦の虚部は，式 6-1 に示す $x_s = X_s\sin(\omega t - \phi)$ と同じである。ただし，

$$X_s = \frac{X_{st}}{\sqrt{\left\{1-\left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2\right\}^2+\left\{2\zeta\left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)\right\}^2}} \qquad ⑧\ (6\text{-}2)$$

$$\phi = \tan^{-1}\left\{\frac{2\zeta\left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)}{1-\left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2}\right\} \qquad ⑨\ (6\text{-}3)$$

である。

２）*2 について

式 6-12 に示す

$$\ddot{x}+2\zeta\omega_n\dot{x}+\omega_n^2x=2\zeta\omega_n\omega Y\cos\omega t+\omega_n^2Y\sin\omega t \qquad ①\ (6\text{-}12)$$

について定常振動を考える。式①の特解を，C，D を未知数として，

$$x=C\cos\omega t+D\sin\omega t \qquad ②$$

と仮定する。式②より，

$$\dot{x}=-\omega C\sin\omega t+\omega D\cos\omega t \qquad ③$$

$$\ddot{x}=-\omega^2(C\cos\omega t+D\sin\omega t)=-\omega^2x \qquad ④$$

と書ける。式③，④を式①へ代入して，式を整理すると，

$$\{(\omega_n^2-\omega^2)C+2\zeta\omega_n\omega D-2\zeta\omega_n\omega Y\}\cos\omega t$$
$$+\{-2\zeta\omega_n\omega C+(\omega_n^2-\omega^2)D-\omega_n^2Y\}\sin\omega t=0 \qquad ⑤$$

となる。未知係数 C，D については，式⑤の三角関数の係数をゼロとおくことにより，

$$\begin{bmatrix}\omega_n^2-\omega^2 & 2\zeta\omega_n\omega\\ -2\zeta\omega_n\omega & \omega_n^2-\omega^2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}C\\ D\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2\zeta\omega_n\omega Y\\ \omega_n^2Y\end{bmatrix} \qquad ⑥$$

となる。式⑥を C，D について解くと，

$$\begin{bmatrix}C\\ D\end{bmatrix}=\frac{1}{(\omega_n^2-\omega^2)^2+(2\zeta\omega_n\omega)^2}\begin{bmatrix}\{-2\zeta\omega_n\omega^3\}Y\\ \{(2\zeta\omega_n\omega)^2+(\omega_n^2-\omega^2)\omega_n^2\}Y\end{bmatrix} \qquad ⑦$$

と求まる。したがって解は，式②に式⑦を代入して，

$$x=\frac{Y}{(\omega_n^2-\omega^2)^2+(2\zeta\omega_n\omega)^2}\{-2\zeta\omega_n\omega^3\}\cos\omega t$$

$$+\frac{Y}{(\omega_n^2-\omega^2)^2+(2\zeta\omega_n\omega)^2}\{(2\zeta\omega_n\omega)^2+(\omega_n^2-\omega^2)\omega_n^2\}\sin\omega t \qquad ⑧$$

となる。三角関数を合成することにより，

$$x=X_s\sin(\omega t-\phi) \qquad ⑨$$

となる。ここで，X_s と ϕ は，

$$X_s=\frac{Y}{(\omega_n^2-\omega^2)^2+(2\zeta\omega_n\omega)^2}\sqrt{\{-2\zeta\omega_n\omega^3\}^2+\{(2\zeta\omega_n\omega)^2+(\omega_n^2-\omega^2)\omega_n^2\}^2}$$

$$=\frac{Y}{(\omega_n^2-\omega^2)^2+(2\zeta\omega_n\omega)^2}\sqrt{(2\zeta\omega_n\omega)^4+(2\zeta\omega_n\omega)^2\{(\omega_n^2-\omega^2)^2+\omega_n^4\}+(\omega_n^2-\omega^2)^2\omega_n^4}$$

$$=\frac{Y}{(\omega_n^2-\omega^2)^2+(2\zeta\omega_n\omega)^2}\sqrt{\{(2\zeta\omega_n\omega)^2+(\omega_n^2-\omega^2)^2\}\{(2\zeta\omega_n\omega)^2+\omega_n^4\}}$$

$$=Y\sqrt{\frac{(2\zeta\omega_n\omega)^2+\omega_n^4}{(\omega_n^2-\omega^2)^2+(2\zeta\omega_n\omega)^2}} \qquad ⑩\ (6\text{-}13)$$

$$\phi=\tan^{-1}\left\{\frac{2\zeta\omega_n\omega^3}{(\omega_n^2-\omega^2)\omega_n^2+(2\zeta\omega_n\omega)^2}\right\} \qquad ⑪\ (6\text{-}14)$$

と表される。

３）*3 について

式 6-18 に示す

$$\ddot{z}+2\zeta\omega_n\dot{z}+\omega_n^2 z=\omega_n^2 Y\sin\omega t \qquad ①$$

について，定常振動を考える。式①の特解を，C，D を未知数として，

$$z=C\cos\omega t+D\sin\omega t \qquad ②$$

と仮定する。式②より，

$$\dot{z}=-\omega C\sin\omega t+\omega D\cos\omega t \qquad ③$$

$$\ddot{z}=-\omega^2(C\cos\omega t+D\sin\omega t)=-\omega^2 z \qquad ④$$

と書ける。式③，④を式①へ代入して，式を整理すると，

$$\{(\omega_n^2-\omega^2)C+2\zeta\omega_n\omega D\}\cos\omega t$$

$$+\{-2\zeta\omega_n\omega C+(\omega_n^2-\omega^2)D-\omega_n^2 Y\}\sin\omega t=0 \qquad ⑤$$

となる。未知係数 C，D については，式⑤の三角関数の係数をゼロとおくことにより，

$$\begin{bmatrix}\omega_n^2-\omega^2 & 2\zeta\omega_n\omega\\ -2\zeta\omega_n\omega & \omega_n^2-\omega^2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}C\\ D\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\ \omega_n^2 Y\end{bmatrix} \qquad ⑥$$

となる。式⑥を C，D について解くと，

$$\begin{bmatrix}C\\ D\end{bmatrix}=\frac{1}{\left(\omega_n^2-\omega^2\right)^2+(2\zeta\omega_n\omega)^2}\begin{bmatrix}-2\zeta\omega_n\omega\\ \omega_n^2-\omega^2\end{bmatrix}\omega^2 Y \qquad ⑦$$

と求まる。したがって解は，式②に式⑦を代入して，

$$z=\frac{Y\omega^2}{\left(\omega_n^2-\omega^2\right)^2+(2\zeta\omega_n\omega)^2}(-2\zeta\omega_n\omega)\cos\omega t+\frac{Y\omega^2}{\left(\omega_n^2-\omega^2\right)^2+(2\zeta\omega_n\omega)^2}(\omega_n^2-\omega^2)\sin\omega t \qquad ⑧$$

となる。三角関数を合成することにより，

$$z_s=Z_s\sin(\omega t-\phi) \qquad ⑨$$

となる。ここで，Z_s と ϕ は，

$$Z_s=\frac{\omega^2 Y}{\sqrt{\left(\omega_n^2-\omega^2\right)^2+(2\zeta\omega_n\omega)^2}} \qquad ⑩\ (6\text{–}19)$$

$$\phi=\tan^{-1}\left\{\frac{2\zeta\omega_n\omega}{\omega_n^2-\omega^2}\right\} \qquad ⑪\ (6\text{–}20)$$

と表される。