7-A1

運動方程式は,

$$m_1\ddot{x}_1 = -k(x_1 - x_2),\quad m_2\ddot{x}_2 = -k(x_2 - x_1)$$

となる。解を $x_1 = X_1 \sin\omega t,\quad x_2 = X_2 \sin\omega t$ と仮定すると

$$(k - m_1\omega^2)X_1 - kX_2 = 0,\quad -kX_1 + (k - m_2\omega^2)X_2 = 0$$

を得る。非自明な解をもつ条件

$$\begin{vmatrix} (k - m_1\omega^2) & -k \\ -k & (k - m_2\omega^2) \end{vmatrix} = 0$$

から，振動数方程式が次式のように導かれる。

$$(k - m_1\omega^2)(k - m_2\omega^2) - k^2 = 0$$
$$\omega^2[m_1 m_2\omega^2 - (m_1 + m_2)k] = 0$$

上式より,

$$\omega^2 = 0,\quad \frac{(m_1 + m_2)k}{m_1 m_2}$$

を得る。$\omega = 0$ を 0 次として固有角振動数は

（0 次振動）$\omega_0 = 0$，（1 次振動）$\omega_1 = \sqrt{\dfrac{(m_1 + m_2)k}{m_1 m_2}} = \sqrt{\dfrac{(1+2)\times 100}{1\times 2}} = 5\sqrt{6}\ \mathrm{rad/s}$

と求められる。一方，振幅比は

$$\left.\frac{X_2}{X_1}\right|_{\omega=\omega_0} = \frac{k - m_1\omega_0^2}{k} = \frac{100 - 1\times 0}{100} = 1$$
$$\left.\frac{X_2}{X_1}\right|_{\omega=\omega_1} = \frac{k - m_1\omega_1^2}{k} = \frac{100 - 1\times\left(5\sqrt{6}\right)^2}{100} = -0.5$$

と得られる。0 次振動モードの振幅比は 1 となり，ばねが伸び縮みしない運動を意味している。この場合，2 つの質量はあたかも剛体で接続されたときと同じ運動となる。そこで，0 次振動モードを剛体モードと称する。

7-A2

運動方程式は,

$$m_1\ddot{x}_1 = -k_1 x_1 - k_2(x_1 - x_2),\quad m_2\ddot{x}_2 = -k_2(x_2 - x_1)$$

となる。解を $x_1 = X_1 \sin\omega t,\quad x_2 = X_2 \sin\omega t$ と仮定すると

$$(k_1 + k_2 - m_1\omega^2)X_1 - k_2X_2 = 0,\quad -k_2X_1 + (k_2 - m_2\omega^2)X_2 = 0$$

を得る。非自明な解をもつ条件

$$\begin{vmatrix} (k_1 + k_2 - m_1\omega^2) & -k_2 \\ -k_2 & (k_2 - m_2\omega^2) \end{vmatrix} = 0$$

から，振動数方程式が次式のように導かれる。

$$(k_1+k_2-m_1\omega^2)(k_2-m_2\omega^2)-k_2^2=0$$
$$m_1m_2\omega^4-[m_1k_2+m_2(k_1+k_2)]\omega^2+k_1k_2=0$$
上式に数値を代入してω^2について解くと$\omega^2=20\mp10\sqrt{3}$が得られ，固有角振動数は
$$\omega_1=\sqrt{20-10\sqrt{3}}=1.637\ \mathrm{rad/s},\ \omega_2=\sqrt{20+10\sqrt{3}}=6.109\ \mathrm{rad/s}$$
と求められる。一方，振幅比は
$$\left.\frac{X_2}{X_1}\right|_{\omega=\omega_1}=\frac{k_1+k_2-m_1\omega_1^2}{k_2}=\frac{30-(20-10\sqrt{3})}{20}=1.366$$
$$\left.\frac{X_2}{X_1}\right|_{\omega=\omega_2}=\frac{k_1+k_2-m_1\omega_2^2}{k_2}=\frac{30-(20+10\sqrt{3})}{20}=-0.3660$$
と得られる。

7-B1

運動方程式は，
$$m_1\ddot{x}_1=-k_1x_1-k_2(x_1-x_2),\quad m_2\ddot{x}_2=-k_2(x_2-x_1)-k_3(x_2-x_3),\quad m_3\ddot{x}_3=-k_2(x_3-x_2)-k_4x_3$$
となる。

7-B2

運動方程式は，
$$m_1\ddot{x}_1=-k_1x_1-k_2(x_1-x_2)-k_3x_1,\quad m_2\ddot{x}_2=-k_2(x_2-x_1)-k_4x_2$$
となる。

7-B3

運動方程式は，

棒：$\dfrac{ml^2}{3}\ddot{\theta}=-k\times\dfrac{l}{2}\theta\times\dfrac{l}{2}-k\times(l\theta-x)\times l$

質量 4*m*：$4m\ddot{x}=-k(x-l\theta)$

となる。解を$\theta=\Theta\sin\omega t,\quad x=X\sin\omega t$と仮定すると次式を得る。
$$\left(\frac{5kl}{4}-\frac{ml}{3}\omega^2\right)\Theta-kX=0,\quad -kl\Theta+(k-4m\omega^2)X=0$$
非自明な解をもつ条件
$$\begin{vmatrix}\left(\dfrac{5kl}{4}-\dfrac{ml}{3}\omega^2\right) & -k\\ -kl & (k-4m\omega^2)\end{vmatrix}=0$$
から，振動数方程式が次式のように導かれる。

$$\left(\frac{5kl}{4}-\frac{ml}{3}\omega^2\right)(k-4m\omega^2)-k^2l=0$$
$$\frac{4m^2l}{3}\omega^4-\frac{16mkl}{3}\omega^2+\frac{k^2l}{4}=0$$

上式をω^2について解くと

$$\omega^2=\frac{(8\mp\sqrt{61})k}{4m}$$

が得られ，固有角振動数は

$$\omega_1=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{(8-\sqrt{61})k}{m}},\quad \omega_2=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{(8+\sqrt{61})k}{m}}$$

と求められる。

7-B4

質量 $2m$ の運動方程式は，

$$2m\ddot{x}_1=-kx_1-k(x_1-x_2)\ \cdot\cdot\cdot ①$$

となる。一方，円柱の運動方程式は

並進運動：$m\ddot{x}_2=-k(x_2-x_1)-F'$ ・・・②

回転運動：$\frac{mr^2}{2}\ddot{\theta}=F'r$ ・・・③

と導かれる。円柱は滑らず転がるので，$\ddot{x}_2=r\ddot{\theta}$が成り立つ。これを式③に代入すると

$$F'=\frac{m}{2}\ddot{x}$$

を得る。これを②に代入すると，次式が導かれる。

$$\frac{3m}{2}\ddot{x}_2=-k(x_2-x_1)\ \cdot\cdot\cdot ④$$

したがって，式①と④が支配方程式となる。解を$x_1=X_1\sin\omega t,\ \ x_2=X_2\sin\omega t$と仮定し，式①と④に代入すると

$$(2k-2m\omega^2)X_1-kX_2=0,\quad -kX_1+\left(k-\frac{3m}{2}\omega^2\right)X_2=0$$

を得る。非自明な解をもつ条件

$$\begin{vmatrix}(2k-2m\omega^2) & -k\\ -k & \left(k-\frac{3m}{2}\omega^2\right)\end{vmatrix}=0$$

から，振動数方程式が次式のように導かれる。

$$(2k-2m\omega^2)\left(k-\frac{3m}{2}\omega^2\right)-k^2=0$$
$$3m^2\omega^4-5mk\omega^2+k^2=0$$

上式をω^2について解くと

$$\omega^2=\frac{(5\mp\sqrt{13})k}{6m}$$

が得られ，固有角振動数は

$$\omega_1=\sqrt{\frac{(5-\sqrt{13})k}{6m}},\ \omega_2=\sqrt{\frac{(5+\sqrt{13})k}{6m}}$$

と求められる。一方，振幅比は

$$\left.\frac{X_2}{X_1}\right|_{\omega=\omega_1}=\frac{2k-2m\omega_1^2}{k}=\frac{2k-2m\times\frac{(5-\sqrt{13})k}{6m}}{k}=\frac{1+\sqrt{13}}{3}$$

$$\left.\frac{X_2}{X_1}\right|_{\omega=\omega_2}=\frac{2k-2m\omega_2^2}{k}=\frac{2k-2m\times\frac{(5+\sqrt{13})k}{6m}}{k}=\frac{1-\sqrt{13}}{3}$$

と得られる。

7-B5

運動方程式は，

$$ml^2\ddot{\theta}_1=-2k\times l\theta_1\times l-k(l\theta_1-l\theta_2)\times l,\quad ml^2\ddot{\theta}_2=-k(l\theta_2-l\theta_1)\times l$$

となる。解を$\theta_1=\Theta_1\sin\omega t,\quad \theta_2=\Theta_2\sin\omega t$と仮定すると

$$(3k-m\omega^2)\Theta_1-k\Theta_2=0,\quad -k\Theta_1+(k-m\omega^2)\Theta_2=0$$

を得る。非自明な解をもつ条件

$$\begin{vmatrix}(3k-m\omega^2) & -k\\ -k & (k-m\omega^2)\end{vmatrix}=0$$

から，振動数方程式が次式のように導かれる。

$$(3k-m\omega^2)(k-m\omega^2)-k^2=0$$
$$m^2\omega^4-4mk\omega^2+2k^2=0$$

上式をω^2について解くと$\omega^2=(2\mp\sqrt{2})k/m$が得られ，固有角振動数は

$$\omega_1=\sqrt{\frac{(2-\sqrt{2})k}{m}},\ \omega_2=\sqrt{\frac{(2+\sqrt{2})k}{m}}$$

と求められる。一方，振幅比は

$$\left.\frac{X_2}{X_1}\right|_{\omega=\omega_1}=\frac{3k-m\omega_1^2}{k}=\frac{3k-m\dfrac{(2-\sqrt{2})k}{m}}{k}=1+\sqrt{2}$$

$$\left.\frac{X_2}{X_1}\right|_{\omega=\omega_2}=\frac{3k-m\omega_2^2}{k}=\frac{3k-m\dfrac{(2+\sqrt{2})k}{m}}{k}=1-\sqrt{2}$$

と得られる。

7-B6

この系の重心は棒の中心にあり，重心まわりの慣性モーメントは

$$I=m\times(l/4)^2\times 2=ml^2/8$$

と求められる。図 7-4(b) と同様な座標系を用いると，運動方程式は,

並進運動： $2m\ddot{x}=-k(x+l\theta/2)-2k(x-l\theta/2)$

回転運動： $\dfrac{ml^2}{8}\ddot{\theta}=2k(x-l\theta/2)\times\dfrac{l}{2}-k(x+l\theta/2)\times\dfrac{l}{2}$

となる。解を $x=X\sin\omega t$, $\theta=\Theta\sin\omega t$ と仮定すると次式を得る。

$$\left(3k-2m\omega^2\right)X-\frac{kl}{2}\Theta=0,\quad -\frac{k}{2}X+\left(\frac{3kl}{4}-\frac{ml}{8}\omega^2\right)\Theta=0$$

非自明な解をもつ条件

$$\begin{vmatrix}\left(3k-2m\omega^2\right) & -\dfrac{kl}{2}\\ -\dfrac{k}{2} & \left(\dfrac{3kl}{4}-\dfrac{ml}{8}\omega^2\right)\end{vmatrix}=0$$

から，振動数方程式が次式のように導かれる。

$$\left(3k-2m\omega^2\right)\left(\frac{3kl}{4}-\frac{ml}{8}\omega^2\right)-\frac{k^2l}{4}=0$$

$$2m^2l\omega^4-15mkl\omega^2+16k^2l=0$$

上式を ω^2 について解くと

$$\omega^2=\frac{(15\mp\sqrt{97})k}{4m}$$

が得られ，固有角振動数は

$$\omega_1=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{(15-\sqrt{97})k}{m}},\quad \omega_2=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{(15+\sqrt{97})k}{m}}$$

と求められる。