9-A1

運動方程式は以下のように表される。

$$
\begin{aligned}
&J_1\ddot{\theta}_1+(k_1+k_2)\theta_1-k_2\theta_2=0\\
&J_2\ddot{\theta}_2-k_2\theta_1+k_2\theta_2=T_0\cos\omega t
\end{aligned}
\tag{1}
$$

式(1)をマトリクス表示すると，以下のようになる。

$$
\begin{bmatrix} J_1 & 0 \\ 0 & J_2 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} \ddot{\theta}_1 \\ \ddot{\theta}_2 \end{Bmatrix}+\begin{bmatrix} k_1+k_2 & -k_2 \\ -k_2 & k_2 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix} 0 \\ T_0 \end{Bmatrix}\cos\omega t \tag{2}
$$

次に，固有振動数と固有モードを求める。式(1)の右辺を 0 とした場合の自由振動に対する基本解を以下のように仮定する。

$$
\begin{aligned}
&\theta_1=\Theta_1\sin\omega t\\
&\theta_2=\Theta_2\sin\omega t
\end{aligned}
\tag{3}
$$

この基本解を運動方程式に代入すると，次式のようになる。

$$
\begin{bmatrix} k_1+k_2-\omega^2 J_1 & -k_2 \\ -k_2 & k_2-\omega^2 J_1 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} \Theta_1 \\ \Theta_2 \end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \tag{4}
$$

$J_1=J_2=$ 1 kgm^2，$k_1=k_2=$ 1 Nm/rad を代入し，行列式を展開すると，以下の振動数方程式を得る。

$$(2-\omega^2)(1-\omega^2)-1=0$$

ω^2について求めると，

$$\omega^2=\frac{3\pm\sqrt{5}}{2}$$

となる。したがって，

$\omega_1=\sqrt{\dfrac{3-\sqrt{5}}{2}}=0.618\,\mathrm{rad/s}$，　$\omega_2=\sqrt{\dfrac{3+\sqrt{5}}{2}}=1.618\ \mathrm{rad/s}$ が得られる。

$\omega_1=0.618\,\mathrm{rad/s}$ および $\omega_2=1.618\ \mathrm{rad/s}$ をそれぞれ式(4)に代入すると次式が得られる。

$$
\begin{bmatrix} 2-0.618^2 & -1 \\ -1 & 1-0.618^2 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} \Theta_1 \\ \Theta_2 \end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix},\quad \begin{bmatrix} 2-1.618^2 & -1 \\ -1 & 1-1.618^2 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} \Theta_1 \\ \Theta_2 \end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix}
$$

以上から，1 次の固有モード $\boldsymbol{X}_1=[X_{11},X_{12}]^T$ および 2 次の固有モード $\boldsymbol{X}_2=[X_{21},X_{22}]^T$ は以下のようになる。

$$
\begin{Bmatrix} X_{11} \\ X_{12} \end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix} 1 \\ 1.618 \end{Bmatrix},\quad \begin{Bmatrix} X_{21} \\ X_{22} \end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix} 1 \\ -0.618 \end{Bmatrix}
$$

次に，以下のモード座標$\boldsymbol{\xi}$を用いて座標変換を行う。

$$
\boldsymbol{\theta}=\begin{bmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \end{bmatrix}=[\boldsymbol{X}]\boldsymbol{\xi},\quad \boldsymbol{\xi}=\{\xi_1,\xi_2\}^T \tag{5}
$$

ここで，固有振動モード行列$[\boldsymbol{X}]$は以下で与えられる。

$$
[\boldsymbol{X}]=\begin{bmatrix} X_{11} & X_{21} \\ X_{12} & X_{22} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1.618 & -0.618 \end{bmatrix} \tag{6}
$$

式(5)を式(2)に代入し，さらに$[\boldsymbol{X}]^T$をその両辺に左から掛けると以下のような式になる。

$$
\begin{bmatrix} \bar{m}_1 & 0 \\ 0 & \bar{m}_2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \ddot{\xi}_1 \\ \ddot{\xi}_2 \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} \bar{k}_1 & 0 \\ 0 & \bar{k}_2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \bar{F}_1 \\ \bar{F}_2 \end{bmatrix}\cos\omega t \tag{7}
$$

ここで,

$$\begin{bmatrix} \overline{m}_1 & 0 \\ 0 & \overline{m}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3.618 & 0 \\ 0 & 1.382 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} \overline{k}_1 & 0 \\ 0 & \overline{k}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.382 & 0 \\ 0 & 3.618 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} \overline{F}_1 \\ \overline{F}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.618 \\ -0.618 \end{bmatrix}$$

式(7)のの強制振動解はそれぞれ以下で与えられる。

$$\xi_1 = \frac{\overline{F}_1 / \overline{k}_1}{1-(\omega/\omega_1)^2}\cos\omega t = \frac{1.618/1.382}{1-(\omega/0.618)^2}\cos\omega t, \quad \xi_2 = \frac{\overline{F}_2 / \overline{k}_2}{1-(\omega/\omega_2)^2}\cos\omega t = \frac{-0.618/3.618}{1-(\omega/1.618)^2}\cos\omega t$$

また,式(5)に代入することで元の物理座標$\boldsymbol{\theta}$に戻すと以下のようになる。

$$\boldsymbol{\theta} = \begin{bmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \end{bmatrix} = [\boldsymbol{X}]\boldsymbol{\xi} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1.618 & -0.618 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dfrac{1.618/1.382}{1-(\omega/0.618)^2}\cos\omega t - \dfrac{0.618/3.618}{1-(\omega/1.618)^2}\cos\omega t \\ \dfrac{1.618^2/1.382}{1-(\omega/0.618)^2}\cos\omega t + \dfrac{0.618^2/3.618}{1-(\omega/1.618)^2}\cos\omega t \end{bmatrix}$$

演習問題 B

9-B1

(1) 運動方程式は以下のように表される。

$$\begin{aligned} &M\ddot{x} + k_1(x - l_1\theta) + k_2(x + l_2\theta) = 0 \\ &J\ddot{\theta} - l_1k_1(x - l_1\theta) + l_2k_2(x + l_2\theta) = 0 \end{aligned} \tag{1}$$

式(1)をマトリクス表示すると,以下のようになる。

$$\begin{bmatrix} M & 0 \\ 0 & J \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} \ddot{\theta}_1 \\ \ddot{\theta}_2 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} k_1 + k_2 & -l_1k_1 + l_2k_2 \\ -l_1k_1 + l_2k_2 & l_1^2k_1 + l_2^2k_2 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \tag{2}$$

(2) 式(1)の自由振動に対する基本解を以下のように仮定する。

$$\begin{aligned} &x = X\sin\omega t \\ &\theta = \Theta\sin\omega t \end{aligned} \tag{3}$$

この基本解を運動方程式に代入すると,次式のようになる。

$$\begin{bmatrix} 2k - \omega^2 M & k \\ k & 5k - \omega^2 J \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} X \\ \Theta \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \tag{4}$$

行列式を展開すると,以下の振動数方程式を得る。

$$(2k - \omega^2 M)(5k - \omega^2 J) - k^2 = 0$$

$M = 1500$ kg, J= 1500 kgm^2, $k = 30$ kN/m を代入し,ωについて求めると,

$\omega_1 = 5.83$ rad/s, $\omega_2 = 10.3$ rad/s が得られる。

(3) $\omega_1 = 5.83$ rad/s および$\omega_2 = 10.3$ rad/s をそれぞれ式(4)に代入すると次式が得られる。

$$\begin{bmatrix} 2k - \omega_1^2 M & k \\ k & 5k - \omega_1^2 J \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} X \\ \Theta \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 2k - \omega_2^2 M & k \\ k & 5k - \omega_2^2 J \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} X \\ \Theta \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

以上から,1 次の固有モード$\boldsymbol{X}_1 = [X_{11}, X_{12}]^T$および 2 次の固有モード$\boldsymbol{X}_2 = [X_{21}, X_{22}]^T$は以下のようになる。

$$\begin{Bmatrix} X_{11} \\ X_{12} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 1 \\ -0.303 \end{Bmatrix}, \quad \begin{Bmatrix} X_{21} \\ X_{22} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 1 \\ 3.30 \end{Bmatrix}$$