14 章　問題解答

予習

１．

(1)　紫外線

(2)

$\nu = \frac{c}{\lambda} = \frac{2.998\times10^{8}}{5.70\times10^{-8}} \fallingdotseq 0.526$　　　　0.526 Hz　［答］

$\tilde{\nu} = \frac{1}{\lambda} = \frac{1}{5.70\times10^{-8}\times100} \fallingdotseq 1.75\times10^{5}$　　　　$1.75\times10^{5}\ \mathrm{cm^{-1}}$　［答］

２．

(1)　$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\sin x = \cos x$

(2)　$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\,\mathrm{e}^{-2r} = -2\mathrm{e}^{-2r}$

(3)　$\int_0^2 (x^2-1)\mathrm{d}x = \left[\frac{1}{3}x^3 - x\right]_0^2 = \frac{8}{3} - 2 = \frac{2}{3}$

演習問題　A

14-A1

$$\tilde{\nu} = \frac{m_{\mathrm{e}}\ e^4}{8\,\varepsilon_0{}^2\,h^3c}\left(\frac{1}{n_1{}^2} - \frac{1}{n_2{}^2}\right) = \frac{9.109\times10^{-31}\times\ (1.602\times10^{-19})^4}{8\times\ (8.854\times10^{-12})^2\times(6.626\times10^{-34})^3\times2.998\times10^8}\times\left(\frac{1}{2^2}-\frac{1}{3^2}\right)$$

$\fallingdotseq 1.523\times10^{6}[\mathrm{m^{-1}}]$　　　　$1.523\times10^{4}\ \mathrm{cm^{-1}}$　［答］

14-A2

$r = n^2\frac{\varepsilon_0\ h^2}{\pi\,m_e\,e^2} = 1^2\times\frac{8.854\times10^{-12}\times(6.626\times10^{-34})^2}{\pi\times9.109\times10^{-31}\times(1.602\times10^{-19})^2} \fallingdotseq 5.292\times10^{-11}$　　　　$5.292\times10^{-11}\mathrm{m}$　［答］

もしくは　<u>0.5292Å</u>

14-A3

節の数は，$n-1 = 6-1 = 5$　　　　5 個　［答］

縮退度は，$n^2 = 6^2 = 36$　　　　36　［答］

演習問題　B

14-B1

(1)

式 14－32 $E=\frac{n^2h^2}{8mL^2}$ より，L が短くなると，エネルギーE は L の 2 乗に反比例して大きくなる。

(2)

確率密度 $|\psi|^2=\frac{2}{L}\sin^2\frac{n\pi x}{L}$ をx について微分すると

$$\frac{d|\psi|^2}{dx}=\frac{4n\pi}{L^2}\cos\frac{n\pi x}{L}\sin\frac{n\pi x}{L}$$

$\frac{4n\pi}{L^2}\neq 0$であることから，これが 0 となるのは

$$\cos\frac{n\pi x}{L}\sin\frac{n\pi x}{L}=0$$

のとき。このうち，$|\psi|^2$ が極大となるのは

$$\cos\frac{n\pi x}{L}=0$$

のときだけである（$\sin\frac{n\pi x}{L}=0$ のときは，$|\psi|^2$ は極小となる)。

したがって，$\frac{n\pi x}{L}=(2m-1)\frac{\pi}{2}$　　$m=1,2,3\ldots n$　　（m は正整数）

$$x=\frac{(2m-1)L}{2n}\qquad m=1,2,3\ldots n$$ [答]

(3)

$n=2$ **のとき**，存在確率が極大となるのは，$x=\frac{L}{4},\frac{3L}{4}$ のとき。このときの存在確率の極大値は

$$|\psi|^2_{max}=\frac{2}{L}\sin^2\frac{2\pi\frac{L}{4}}{L}=\frac{2}{L}\sin^2\frac{\pi}{2}=\frac{2}{L}$$

極大値がこの半分になるときの位置をx とすると

$$\frac{2}{L}\sin^2\frac{2\pi x}{L}=\frac{1}{L}$$

$$\sin^2\frac{2\pi x}{L}=\frac{1}{2}$$

$$\sin\frac{2\pi x}{L}=\pm\sqrt{\frac{1}{2}}$$

$n=2$のとき $0\leqq\frac{2\pi x}{L}\leqq 2\pi$ であるため

$$\frac{2\pi}{L}x=\frac{\pi}{4},\frac{3\pi}{4},\frac{5\pi}{4},\frac{7\pi}{4}$$

$$x=\frac{L}{8},\frac{3L}{8},\frac{5L}{8},\frac{7L}{8}$$ [答]

14-B2

$$\int|\psi_{1s}|^2d\tau=\frac{1}{\pi a_0^3}\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\int_0^{a_0}e^{-2r/a_0}\ r^2\sin\theta\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}\phi$$

$$=\frac{1}{\pi a_0^3}\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\phi\int_0^{\pi}\sin\theta\,\mathrm{d}\theta\int_0^{a_0}r^2e^{-\frac{2}{a_0}r}\ \mathrm{d}r$$

$$=\frac{1}{\pi a_0^3}[\phi]_0^{2\pi}\ [-\cos\theta]_0^{\pi}\left[e^{-2r/a_0}\left(\frac{a_0\,r^2}{-2}-\frac{2{a_0}^2\ r}{4}+\frac{2{a_0}^3}{-8}\right)\right]_0^{a_0}$$

$$= \frac{1}{\pi\, a_0^3}\ (2\pi - 0)\{1 - (-1)\}\ \left\{ \mathrm{e}^{-2}\left(\frac{{a_0}^3}{-2} - \frac{2{a_0}^3}{4} + \frac{2{a_0}^3}{-8}\right) - \mathrm{e}^0\left(0 - 0 + \frac{2{a_0}^3}{-8}\right)\right\}$$

$$= \frac{4}{a_0^3}\left\{\mathrm{e}^{-2}\left(-\frac{1}{2} - \frac{1}{2} - \frac{1}{4}\right){a_0}^3 + \frac{{a_0}^3}{4}\right\}$$

$$= \ 1 - 5\mathrm{e}^{-2}$$

$= \ 0.32332\ldots$　　　　　したがって　<u>0.323</u>　［答］

14-B3

電子とプロトンの換算質量μは

$$\mu = \frac{m_\mathrm{e}\, m_\mathrm{p}}{m_\mathrm{e} + m_\mathrm{p}} = \frac{9.109 \times 10^{-31} \times 1.673 \times 10^{-27}}{9.109 \times 10^{-31} + 1.673 \times 10^{-27}} = \frac{9.109 \times 1.673 \times 10^{-31}}{9.109 \times 10^{-4} + 1.673} = 9.1040 \ldots \times 10^{-31}$$

$$E_\infty - E_1 = -\frac{Z^2 \mu\, e^4}{8{\varepsilon_0}^2\, h^2}\left(\frac{1}{\infty^2} - \frac{1}{1}\right)$$

$$= -\frac{1^2 \times 9.104 \times 10^{-31} \times\ (1.602 \times 10^{-19})^4}{8 \times (8.854 \times 10^{-12})^2\ \times (6.626 \times 10^{-34})^2}(0 - 1)$$

$$= \frac{9.104 \times 1.602^4}{8 \times 8.854^2\ \times 6.626^2} \times 10^{-31-19\times4+12\times2+34\times2}$$

$$= 2.1777 \ldots \times 10^{-18}$$

1 mol あたりのイオン化エネルギーは,

$$\left(E_\infty - E_1\right) \times N_\mathrm{A} \fallingdotseq 2.178 \times 10^{-18} \times 6.022 \times 10^{23} = 1.31159 \ldots \times 10^6$$

したがって　1312 kJ･mol^{-1}　［答］