３章　問題解答

予習

1．

Pa = kg・m^{-1}・s^{-2}

J = kg・m^2・s^{-2}

から

J/Pa = m^3　あるいは　J=Pa・m^3　[答]

2．

運動方程式から

$$F = m\frac{du}{dt}$$

$$Fdt = mdu$$

となる。Fを一定として，積分すると

$$\int_0^t Fdt = \int_u^0 mdu$$

$$Ft = -mu$$

$$F = -\frac{mu}{t} = -\frac{1000\ \mathrm{kg}\times(50\times1000\div3600)\ \mathrm{m\cdot s^{-1}}}{20\ \mathrm{s}} = -694\ \mathrm{N}$$　[答]

負号は物体の進行方向とは逆向きに力が働くことを示す。

演習問題Ａ

3-A1

ボイルの法則から

$$V_1 = \frac{p_2V_2}{p_1} = \frac{14.7\ \mathrm{MPa}\times47.0\ \mathrm{dm^3}}{0.100\ \mathrm{MPa}} = 6.91\times10^3\ \mathrm{dm^3}$$　[答]

理想気体の状態方程式から N_2 の分子量を M, 質量を Wとすると

$$W = \frac{Mp_2V_2}{RT} = \frac{28.02\ \mathrm{g\ mol^{-1}}\times14.7\times10^6\ \mathrm{Pa}\times47.0\times10^{-3}\ \mathrm{m^3}}{8.314\ \mathrm{J\ mol^{-1}K^{-1}}\times298\ \mathrm{K}}$$

$= 7.81\times10^3\mathrm{g} = 7.81\ \mathrm{kg}$　[答]

3-A2

容器の体積を 2V とすると，混合前(initial)の条件から，

$$\mathrm{n_{He}} = \frac{p_{\mathrm{He,i}}V}{RT}$$

$$\mathrm{n_{Ar}} = \frac{p_{\mathrm{Ar,i}}V}{RT}$$

同様に混合後(final)の条件から

$$p_{\mathrm{He,f}} = \frac{n_{\mathrm{He}}RT}{2V}$$

$$p_{\mathrm{Ar,f}} = \frac{n_{\mathrm{Ar}}RT}{2V}$$

したがって，混合後の分圧を得る。

$$p_{\mathrm{He,f}} = \frac{p_{\mathrm{He,i}}}{2} = \frac{0.200\ \mathrm{MPa}}{2} = 0.100\ \mathrm{MPa}$$ ［答］

$$p_{\mathrm{Ar,f}} = \frac{p_{\mathrm{Ar,i}}}{2} = \frac{0.150\ \mathrm{MPa}}{2} = 0.0750\ \mathrm{MPa}$$ ［答］

3-A3

3 原子分子で非直線分子であるから，自由度は並進 3，回転 3，振動 9-6=3

$$E_{\mathrm{m}} = \frac{3}{2}RT + \frac{3}{2}RT + 3RT = 6RT$$

定積モル熱容量は本文の式(3-24)を用いると次の通りとなる。

$$C_{\mathrm{V,m}} = \left(\frac{\partial U_{\mathrm{m}}}{\partial T}\right)_V = \left\{\frac{\partial\left(U_{0,\mathrm{m}}+E_{\mathrm{m}}\right)}{\partial T}\right\}_V = \left(\frac{\partial 6RT}{\partial T}\right)_V = 6R = 6 \times 8.314\ \mathrm{J \cdot mol^{-1} \cdot K^{-1}} = 49.9\ \mathrm{J \cdot mol^{-1} \cdot K^{-1}}$$ ［答］

3-A4

Ne と Ar の根平均 2 乗速度はそれぞれ

$$\sqrt{\overline{u_{\mathrm{Ne}}^2}} = \sqrt{\frac{3RT_{\mathrm{Ne}}}{M_{\mathrm{Ne}}}}$$

$$\sqrt{\overline{u_{\mathrm{Ar}}^2}} = \sqrt{\frac{3RT_{\mathrm{Ar}}}{M_{\mathrm{Ar}}}}$$

条件から，$\sqrt{\overline{u_{\mathrm{Ne}}^2}} = \sqrt{\overline{u_{\mathrm{Ar}}^2}}$ であり，次式となる

$$T_{\mathrm{Ar}} = \frac{T_{\mathrm{Ne}}M_{\mathrm{Ar}}}{M_{\mathrm{Ne}}} = \frac{298.15\ \mathrm{K} \times 39.95 \times 10^{-3}\ \mathrm{kg \cdot mol^{-1}}}{20.18 \times 10^{-3}\ \mathrm{kg \cdot mol^{-1}}} = 590\ \mathrm{K}$$ ［答］

3-A5

$$u_{\mathrm{max}} = \sqrt{\frac{2RT}{M}} = \sqrt{\frac{2 \times 8.314\ \mathrm{J \cdot mol^{-1} K^{-1}} \times 2273\ \mathrm{K}}{28.02 \times 10^{-3}\ \mathrm{kg \cdot mol^{-1}}}} = 1.16 \times 10^3\ \mathrm{m \cdot s^{-1}}$$ ［答］

$$\bar{u} = \sqrt{\frac{8RT}{\pi M}} = \sqrt{\frac{8 \times 8.314\ \mathrm{J \cdot mol^{-1} K^{-1}} \times 2273\ \mathrm{K}}{3.14 \times 28.02 \times 10^{-3}\ \mathrm{kg \cdot mol^{-1}}}} = 1.31 \times 10^3\ \mathrm{m \cdot s^{-1}}$$ ［答］

$$\sqrt{\overline{u^2}} = \sqrt{\frac{3RT}{M}} = \sqrt{\frac{3 \times 8.314\ \mathrm{J \cdot mol^{-1} K^{-1}} \times 2273\ \mathrm{K}}{28.02 \times 10^{-3}\ \mathrm{kg \cdot mol^{-1}}}} = 1.42 \times 10^3\ \mathrm{m \cdot s^{-1}}$$ ［答］

図への記入は下記の通りである。

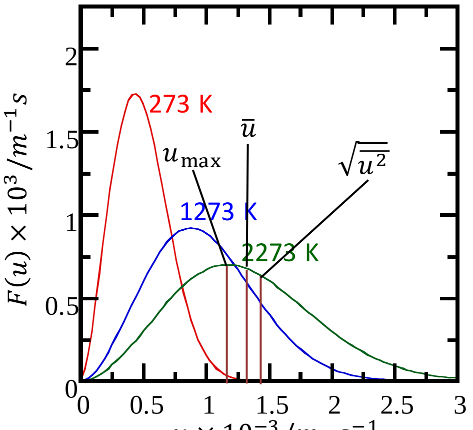

図3-10 N_2の速度分布

3-A6

$$Z = \frac{\sqrt{2}\pi d^2 \bar{u} p}{k_B T} = \frac{\sqrt{2}\pi \times (380 \times 10^{-12}\,\mathrm{m})^2 \times 1.31 \times 10^3\ \mathrm{m \cdot s^{-1}} \times 1.013 \times 10^5\ \mathrm{Pa}}{1.381\ \times 10^{-23}\ \mathrm{J \cdot K^{-1}} \times 2273\ \mathrm{K}}$$

$= 2.71 \times 10^9\ \mathrm{s^{-1}}$ ［答］

$\lambda = \frac{\bar{u}}{Z} = \frac{1.31 \times 10^3\ \mathrm{m \cdot s^{-1}}}{2.71 \times 10^9\ \mathrm{s^{-1}}} = 4.83 \times 10^{-7}\ \mathrm{m} = 483\ \mathrm{nm}$ ［答］

演習問題 B

3-B1

空気が 1 mol あるとする。

$$\mathrm{N_2}\quad 0.79\ \mathrm{mol} \times 28.02\ \mathrm{g \cdot mol^{-1}} = 22.1\ \mathrm{g},\ \ \mathrm{O_2}\quad 0.21\ \mathrm{mol} \times 32.00\ \mathrm{g \cdot mol^{-1}} = 6.7\ \mathrm{g}$$

理想気体の状態方程式から

$$V = \frac{nRT}{p} = \frac{1\ \mathrm{mol} \times 8.314\ \mathrm{J \cdot mol^{-1} \cdot K^{-1}} \times 298\ \mathrm{K}}{1.013 \times 10^5\ \mathrm{Pa}} = 2.45 \times 10^{-2}\ \mathrm{m^3}$$

$\rho = \frac{W}{V} = \frac{(22.1 + 6.7)\ \mathrm{g}}{2.45 \times 10^{-2}\ \mathrm{m^3}} = 1.18 \times 10^3\ \mathrm{g \cdot m^{-3}} = 1.18\ \mathrm{g \cdot dm^{-3}}$ ［答］

3-B2

マクスウェル-ボルツマンの速度分布から

$$F = 4\pi u^2 \left(\frac{m}{2\pi k_\mathrm{B} T}\right)^{\frac{3}{2}} \exp\left(-\frac{mu^2}{2k_\mathrm{B}T}\right) = ku^2 \exp\left(-\frac{mu^2}{2k_\mathrm{B}T}\right)$$

ただし，k は定数である．最大確率速度 $u = u_{\max}$ では

$$\frac{dF}{du} = 0$$

よって

$$\frac{dF}{du} = k\left(2u - u^2\frac{2mu}{2k_\mathrm{B}T}\right)\exp\left(-\frac{mu^2}{2k_\mathrm{B}T}\right) = 0$$

$$ku\left(2-\frac{mu^2}{k_\mathrm{B}T}\right)\exp\left(-\frac{mu^2}{2k_\mathrm{B}T}\right)=0$$

最 大 確 率 速 度 で は

$$u\neq 0,\qquad \exp\left(-\frac{mu^2}{2k_\mathrm{B}T}\right)\neq 0$$

な の で， 本 文 中 の 式 3-31 は 次 の よ う に 求 め ら れ る 。

$$\left(2-\frac{mu_\mathrm{max}^2}{k_\mathrm{B}T}\right)=0$$

$$u_\mathrm{max}=\sqrt{\frac{2k_\mathrm{B}T}{m}}=\sqrt{\frac{2RT}{M}}\quad［答］$$

平 均 値 の 定 理 か ら

$$\bar{u}=\int_0^\infty uFdu=\int_0^\infty kuu^2\exp\left(-\frac{mu^2}{2k_\mathrm{B}T}\right)du=\int_0^\infty ku^2u\exp\left(-\frac{mu^2}{2k_\mathrm{B}T}\right)du$$

$$f(u)=ku^2, g'(u)=u\exp\left(-\frac{mu^2}{2k_\mathrm{B}T}\right)$$

と し て， 部 分 積 分 す る と

$$\bar{u}=\left[ku^2\left(-\frac{2k_\mathrm{B}T}{2m}\right)\exp\left(-\frac{mu^2}{2k_\mathrm{B}T}\right)\right]_0^\infty-\int_0^\infty 2ku\left(-\frac{2k_\mathrm{B}T}{2m}\right)\exp\left(-\frac{mu^2}{2k_\mathrm{B}T}\right)du$$

第 1 項 は ゼ ロ で あ る（$\exp(-\infty)=0,\quad 0^2=0$）か ら， 本 文 中 の 式 3-30 は 次 の よ う に 求 め ら れ る 。

$$\bar{u}=\int_0^\infty 2ku\left(\frac{k_\mathrm{B}T}{m}\right)\exp\left(-\frac{mu^2}{2k_\mathrm{B}T}\right)du=\left[2k\left(\frac{k_\mathrm{B}T}{m}\right)^2\exp\left(-\frac{mu^2}{2k_\mathrm{B}T}\right)\right]_0^\infty=2k\left(\frac{k_\mathrm{B}T}{m}\right)^2=\sqrt{\frac{8k_\mathrm{B}T}{\pi m}}=\sqrt{\frac{8RT}{\pi M}}\quad［答］$$

3-B3

ボ ル ツ マ ン 分 布 か ら

$$\frac{N_i}{N_0}=\exp\left\{-\frac{\varepsilon_i-\varepsilon_0}{k_\mathrm{B}T}\right\}$$

位 置 エネルギーはmghであるから，海 面 の 高 さを$h_0=0$，富 士 山 の 頂 上 の 高 さをh_iとすると，

$$\frac{N_i}{N_0}=\exp\left\{-\frac{mg(h_i-h_0)}{k_\mathrm{B}T}\right\}=\exp\left\{-\frac{Mg(h_i-h_0)}{RT}\right\}$$

気 圧 は分 子 数 に比 例 するため，

$$\frac{p_i}{p_0}=\exp\left\{-\frac{Mg(h_i-h_0)}{RT}\right\}$$

$$p_i=p_0\exp\left\{-\frac{Mg(h_i-h_0)}{RT}\right\}$$

富 士 山 の 頂 上 では，次 式となる。

$$p_i=101.3\ \mathrm{kPa}\times\exp\left\{-\frac{28.02\times10^{-3}\ \mathrm{kg\cdot mol^{-1}}\times9.807\ \mathrm{m\cdot s^{-2}}\times(3776\ \mathrm{m}-0\ \mathrm{m})}{8.314\ \mathrm{J\cdot mol^{-1}\cdot K^{-1}}\times298\ \mathrm{K}}\right\}=66.6\ \mathrm{kPa}\ ［答］$$

同 様 に，チョモランマの 頂 上 では，次 のようになる。

$p_i=38.0\ \mathrm{kPa}$ ［答］

3-B4

$u_1 = 1000\ \mathrm{m \cdot s^{-1}}$ としたとき，この割合は

$$\int_{u_1}^{\infty} F\,du = 1 - \int_0^{u_1} F\,du$$

で与えられる（右辺第 2 項は図 4 の S に相当）が，解析的に積分できないので，数値積分する。ここで，最も単純な台形法を用いる。

台形法では積分値を図 5 のような台形の面積（S_1，S_2，S_3・・・）の合計として計算する。まず，計算を簡単にするために次式で定義する k を計算する。

$$k = \frac{m}{2k_\mathrm{B}T} = \frac{M}{2RT} = \frac{28.02 \times 10^{-3}\ \mathrm{kg \cdot mol^{-1}}}{2 \times 8.314\ \mathrm{J \cdot mol^{-1} \cdot K^{-1}} \times 273\ \mathrm{K}} = 6.17 \times 10^{-6}\ \mathrm{m^{-2} \cdot s^2}$$

k の値を用いて，各台形の面積を算出する．台形の横幅を $\Delta u = 10\ \mathrm{m \cdot s^{-1}}$ としたとき，1 つめの台形（図 5 では三角形となっている）の面積 S_1 を求める。

$u = 0$ のとき， $F = 0$。 $u = 10\ \mathrm{m \cdot s^{-1}}$ のとき，

$$F = 4\pi u^2 \left(\frac{m}{2\pi k_\mathrm{B}T}\right)^{\frac{3}{2}} \exp\left(-\frac{mu^2}{2k_\mathrm{B}T}\right) = 4\pi u^2 \left(\frac{k}{\pi}\right)^{\frac{3}{2}} \exp(-ku^2)$$

$$= 4 \times 3.14 \times \left(10\ \mathrm{m \cdot s^{-1}}\right)^2 \left(\frac{6.17 \times 10^{-6}\ \mathrm{m^{-2} \cdot s^2}}{3.14}\right)^{\frac{3}{2}} \exp\left\{-6.17 \times 10^{-6}\ \mathrm{m^{-2} \cdot s^2} \times \left(10\ \mathrm{m \cdot s^{-1}}\right)^2\right\}$$

$$= 3.46 \times 10^{-6}\ \mathrm{m^{-1} \cdot s}$$

$$S_1 = \frac{\left(3.46 \times 10^{-6}\ \mathrm{m^{-1} \cdot s} + 0\right) \times \left(10\ \mathrm{m \cdot s^{-1}} - 0\right)}{2} = 1.73 \times 10^{-5}$$

以下，同様に $10\ \mathrm{m \cdot s^{-1}}$ 刻みで $1000\ \mathrm{m \cdot s^{-1}}$ までの台形の面積を求めて，その総和を計算すると 0.994 となる。したがって，273K では次のようになる。

$1 - \int_0^{u_1} F\,du = 1 - 0.994 = 0.006$ ［答］

同様に，2273 K では次のようになる。

$1 - \int_0^{u_1} F\,du = 1 - 0.313 = 0.687$ ［答］

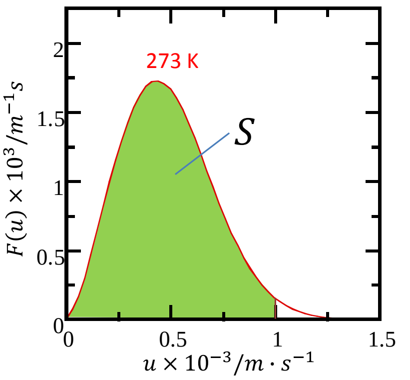

図 4　N_2 分子の速度分布

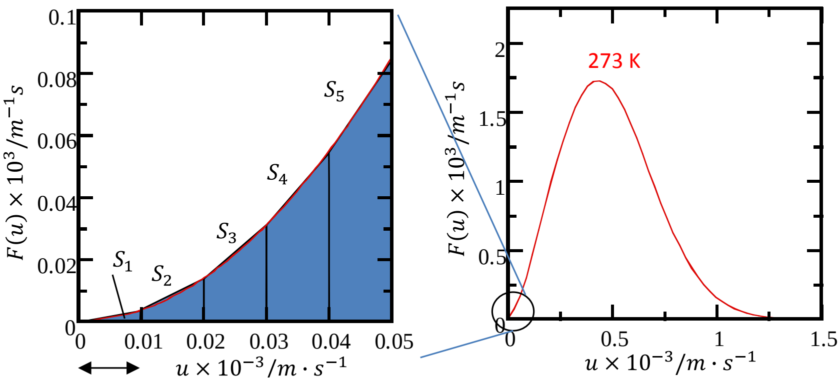

図 5　N_2 分子の速度分布