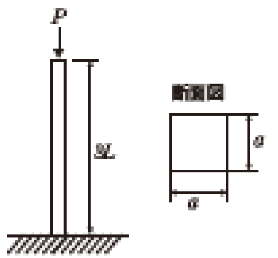
演習問題 A 基本の確認をしましょう

10-A1 次の図に示す中心圧縮荷重のみを受ける一様な正方形断面を有する柱の座屈荷重 P_{cr} を求めよ。ただし，柱を構成する材料のヤング係数は E とする。



断面２次モーメントは，$I = \frac{a^4}{12}$となる。一端固定，他端自由の支持条件となるため，表 10-1 から$l_k = 2l = 6L$となる。よって，（10-15）式から，

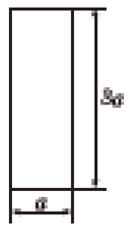
$$P_{cr} = \frac{\pi^2 EI}{{l_k}^2} = \frac{\pi^2 E}{(6L)^2} \cdot \frac{a^4}{12}$$

$$= \frac{1}{432} \frac{\pi^2 E a^4}{L^2}$$

（答え）$P_{cr} = \frac{1}{432} \frac{\pi^2 E a^4}{L^2}$

10-A2　10-A1において柱断面が次の図に示すような長方形の場合の座屈荷重 P_{cr} を求めよ。ここで，座屈荷重 P_{cr} は，その断面に作用する最小の荷重とする。

断面図



（10-A1）と支持条件が同じであるため，$l_k = 2l = 6L$となる。座屈荷重P_{cr}は，（10-15 式）から，

$$P_{cr} = \frac{\pi^2 EI}{{l_k}^2} = \frac{\pi^2 EI}{(6L)^2} = \frac{1}{36}\frac{\pi^2 EI}{L^2}$$

強軸まわりで考えると，

$$\mathrm{I} = \frac{a \cdot (3a)^3}{12} = \frac{27}{12}a^4 = \frac{9}{4}a^4$$

よって，強軸（x-x 軸）まわりの座屈荷重$P_{cr\ x}$は，

$$P_{cr\ x} = \frac{1}{36}\cdot\frac{\pi^2 EI}{L^2} = \frac{1}{36}\cdot\frac{\pi^2 E}{L^2}\cdot\frac{9}{4}a^4 = \frac{1}{16}\cdot\frac{\pi^2 Ea^4}{L^2}$$

となる。次に弱軸まわりで考えると，

$$\mathrm{I} = \frac{3a \cdot a^3}{12} = \frac{1}{4}a^4$$

よって，弱軸（y-y 軸）まわりの座屈荷重$P_{cr\ y}$は，

$$P_{cr\ y} = \frac{1}{36}\cdot\frac{\pi^2 EI}{L^2} = \frac{1}{36}\cdot\frac{\pi^2 E}{L^2}\cdot\frac{1}{4}a^4 = \frac{1}{144}\cdot\frac{\pi^2 Ea^4}{L^2}$$

となる。$P_{cr\ x} > P_{cr\ y}$ となるため，この部材は弱軸まわりの座屈荷重$P_{cr\ y}$で座屈する。

（答え）$P_{cr\ y} = \frac{1}{144}\cdot\frac{\pi^2 Ea^4}{L^2}$

演習問題 B **もっと使えるようになりましょう**

1-B1　長さ L [m] の両端固定された中心圧縮部材について，次の図に示すような一様断面を有する形状で，座屈応力 σ_{cr} が降伏応力 σ_y（= 235 MPa）を超えるように設計したい。この場合，圧縮材の長さ L をどのようにすればよいか。ただし，断面 2 次モーメントは $I_x = 3.1\times10^8$，$I_y = 2\times10^7$，断面積 A は 1.0×10^5，ヤング係数 E は 206 GPa とする。

※　問題文中に断面性能の値に単位の記載がない。以下，次のように計算をする。

断面２次モーメント　$I_x = 3.1\times10^8\ \ mm^4$

$I_y = 2.0\times10^7\ \ mm^4$

断面積　$A = 1.0\times10^5\ \ mm^2$

（10-16）式より，

$$\sigma_{cr} = \frac{P_{cr}}{A} = \frac{\pi^2 E}{{l_k}^2}\cdot\frac{I}{A}$$

となり，両端固定の支持条件から $l_k = \frac{1}{2}L$ となる。問題より $\sigma_{cr} > \sigma_y$ となる条件から，

$$\sigma_{cr} = \frac{\pi^2 E}{{l_k}^2}\cdot\frac{I}{A} = \frac{\pi^2 E}{\left(\frac{L}{2}\right)^2}\cdot\frac{I}{A} = 4\cdot\frac{\pi^2 E}{L^2}\cdot\frac{I}{A} \geqq \sigma_y$$

$$L^2 \leqq \frac{4}{A}\cdot\frac{\pi^2 EI}{\sigma_y} \qquad \Rightarrow \qquad L \leqq \sqrt{\frac{4}{A}\cdot\frac{\pi^2 EI}{\sigma_y}} \qquad \cdot\cdot\cdot ①$$

強軸まわりで考える。①式の右辺を計算する。

$$(右辺) = \sqrt{\frac{4}{A}\cdot\frac{\pi^2 EI_x}{\sigma_y}} = \sqrt{\frac{4}{1.0\times10^5}\cdot\frac{\pi^2\times(206\times10^3)\times(3.1\times10^8)}{235}}$$

$\cancel{= 10.35238\cdots\times10^3}$ ← ~~削除~~

$\fallingdotseq 10353$

よって，$\mathrm{L} \leqq 10353\ \ mm$

次に，弱軸まわりで考える。①式の右辺を計算する。

$$(右辺) = \sqrt{\frac{4}{A}\cdot\frac{\pi^2 EI_y}{\sigma_y}} = \sqrt{\frac{4}{1.0\times10^5}\cdot\frac{\pi^2\times(206\times10^3)\times(2\times10^7)}{235}}$$

$= 2629.5069\cdots$

$\fallingdotseq 2630$

よって，$\mathrm{L} \leqq 2630\ \ mm$

（答え）

座屈荷重は座屈長さが長くなると低下し，短くなると上昇する。つまり部材長 L を 2630mm（=2.63m）以下にすると，座屈応力σ_{cr}が降伏応力σ_yを超えることになる。