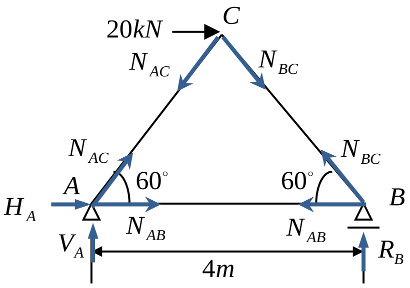
【第 12 章　予習問題の解答】

予習問題 1 の解答



反力を図のように仮定する。

$\sum H = 0$ より、

$H_A + 20 = 0$

よって、

$H_A = -20kN$

$\sum M_{(B)} = 0$ ： $4V_A + 2\sqrt{3} \times 20 = 0$

よって、

$V_A = -10\sqrt{3}kN$

$\sum V = 0$ ： $V_B = -V_A = 10\sqrt{3}kN$

節点法により部材力を求めると以下のようになる。

節点Ｂ

$\sum V = 0$ ： $V_B + N_{BC} \sin 60^\circ = 0$

$$10\sqrt{3} + \frac{\sqrt{3}}{2} N_{BC} = 0$$

よって、 $N_{BC} = -20kN$

$\sum H = 0$ ： $-N_{AB} - N_{BC} \cos 60^\circ = 0$

$$-N_{AB} - (-20) \times \frac{1}{2} = 0$$

よって、 $N_{AB} = 10kN$

節点Ｃ

$\sum V = 0$ ： $-N_{AC} \cos 30^\circ - N_{BC} \cos 30^\circ = 0$

$$-N_{AC} - (-20) = 0$$

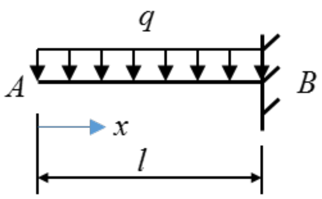
よって、 $N_{AC} = 20kN$

【第 12 章　予習問題の解答】

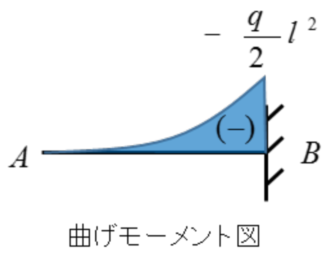
予習問題 2 の解答

図の(a)に示すように自由端からの距離 x における曲げモーメント M_x は次式で表され、曲げモーメント図は図の(b)のようになる。

$$M_x = -qx \times \frac{x}{2} = -\frac{q}{2}x^2$$



(a)



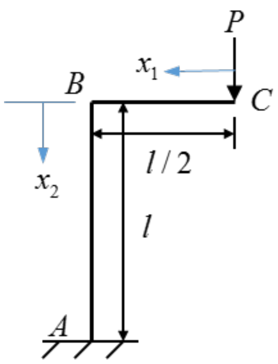
(b)

予習問題 3 の解答

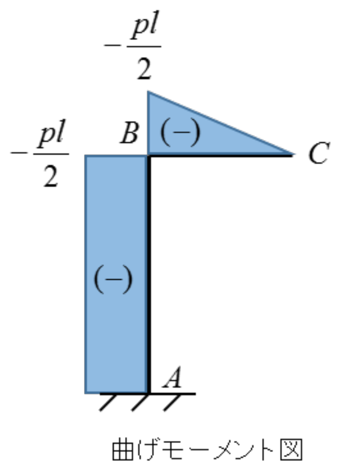
図の(a)に示すように点 C および B からの距離 x_1，x_2 における曲げモーメント M_{x_1}，M_{x_2} はそれぞれ次式で表され、曲げモーメント図は図の(b) のようになる。

$$M_{x_1} = -Px$$

$$M_{x_2} = -P \times \frac{l}{2} = -\frac{P}{2}l$$



(a)



(b)

【PEL　原稿　フォーマット】
32 字×38 行に設定。句読点はできれば「，。」（カンマ，丸）に。書体は明朝・10.5P で結構です。

演習問題 A-1 の解答

棒のひずみエネルギーをUとすると、

$$U = \frac{P^2 h}{2EA} + \frac{P^2 (2h)}{2(2E)A}$$

$$= \frac{P^2 h}{2EA} + \frac{P^2 h}{2EA}$$

$$= \frac{P^2 h}{EA}$$

エネルギー保存則より

$$\frac{P^2 h}{EA} = \frac{1}{2} P u$$

$$\therefore u = \frac{2Ph}{EA}$$

【PEL　原稿　フォーマット】
32 字×38 行に設定。句読点はできれば「，。」（カンマ，丸）に。書体は明朝・10.5P で結構です。

演習問題 A-2の解答

$\because N_{AC} = N_{BC}$ より

$$2N_{AC} \times \frac{4}{5} = 50$$

$$N_{AC} = N_{BC} = 31.25\,\mathrm{kN}$$

$$N_{AB} = -N_C \times \frac{3}{5} = -18.75\,\mathrm{kN}$$

部材	N (kN)	(s)	$N^2s/(2EA)$ (kN-m)
AC	31.25	5	0.488
BC	31.25	5	0.488
AB	-18.75	6	0.211
		合計	1.187

エネルギー保存則より

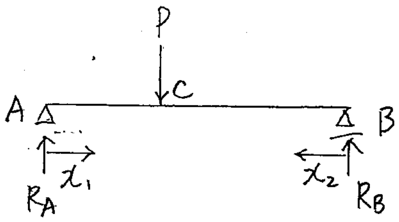
$$\frac{1}{2} \times 50 \times \delta_c = 1.187$$

$$\delta_c = 0.047\,\mathrm{m}$$

$$= 4.7\,\mathrm{cm}$$

【PEL　原稿　フォーマット】
32 字×38 行に設定。句読点はできれば「，。」（カンマ，丸）に。書体は明朝・10.5P で結構です。

演習問題 A-3 の解答



反力を図のように仮定する．

$\Sigma M_B = 0$ より

$lR_A - Pb = 0$

$R_A = \frac{b}{l}P$

$\Sigma M_A = 0$ より

$R_B = \frac{a}{l}P$

$(0 \leqq x_1 \leqq a)$

$M_{x_1} = \frac{b}{l}Px$, $\bar{M}_{x_1} = \frac{b}{l}x$

$(0 \leqq x_2 \leqq b)$

$M_{x_2} = \frac{a}{l}Px$, $\bar{M}_{x_2} = \frac{a}{l}x$.

$$\delta_C = \int_0^a \frac{M_{x_1}\bar{M}_{x_1}}{EI}dx_1 + \int_0^b \frac{M_{x_2}\bar{M}_{x_2}}{EI}dx_2$$

$$= \frac{1}{EI}\int_0^a \left(\frac{b}{l}Px_1\right)\left(\frac{b}{l}x_1\right)dx_1 + \frac{1}{EI}\int_0^b \left(\frac{a}{l}Px_2\right)\left(\frac{a}{l}x_2\right)dx_2$$

$$= \frac{Pb^2}{EIl^2}\int_0^a x_1^2 dx_1 + \frac{Pa^2}{EIl^2}\int_0^b x_2^2 dx_2$$

$$= \frac{Pb^2a^3}{3EIl^2} + \frac{Pa^2b^3}{3EIl^2}$$

$$= \frac{Pa^2b^2}{3EIl^2}(a+b)$$

$$= \frac{Pa^2b^2}{3EIl}$$

【PEL　原稿　フォーマット】
32 字×38 行に設定。句読点はできれば「，。」（カンマ，丸）に。書体は明朝・10.5P で結構です。

演習問題 A-4の解答

$$\frac{\partial M_{x_1}}{\partial P} = -\frac{a}{\ell}x_1$$

$$\frac{\partial M_{x_2}}{\partial P} = -x_2$$

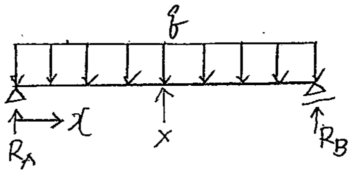
$$\begin{aligned}\frac{\partial U_1}{\partial P} &= \frac{1}{EI}\int_0^\ell M_{x_1}\frac{\partial M_{x_1}}{\partial P}dx_1 \\ &= \frac{1}{EI}\int_0^\ell \left(-\frac{a}{\ell}Px_1\right)\left(-\frac{a}{\ell}x_1\right)dx_1 \\ &= \frac{Pa^2}{EI\ell^2}\int_0^\ell x_1^2\,dx_1 \\ &= \frac{Pa^2\ell}{3EI}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial U_2}{\partial P} &= \frac{1}{EI}\int_0^a M_{x_2}\frac{\partial M_{x_2}}{\partial P}dx_2 \\ &= \frac{1}{EI}\int_0^a (-Px_2)(-x_2)dx_2 \\ &= \frac{P}{EI}\int_0^a x_2^2\,dx_2 \\ &= \frac{Pa^3}{3EI}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\delta_c = \frac{\partial U}{\partial P} &= \frac{\partial U_1}{\partial P} + \frac{\partial U_2}{\partial P} \\ &= \frac{Pa^2\ell}{3EI} + \frac{Pa^3}{3EI} \\ &= \frac{Pa^2}{3EI}(a+\ell)\end{aligned}$$

【PEL　原稿　フォーマット】
32 字×38 行に設定。句読点はできれば「，。」（カンマ，丸）に。書体は明朝・10.5P で結構です。

演習問題 A-5の解答



静定基本形を単純ばりとし、不静定力をXとする。
反力は次ようになる。

$$R_A = R_B = \frac{1}{2}(ql - X)$$

$\left(0 \leqq x \leqq \frac{l}{2}\right)$

$$M_x = \frac{1}{2}(ql - X)x - \frac{1}{2}qx^2 \quad , \quad \frac{\partial M_x}{\partial X} = -\frac{1}{2}x$$

$$U = 2\int_0^{\frac{l}{2}} \frac{M_x^2}{2EI} dx$$

$$\frac{\partial U}{\partial X} = \frac{2}{EI}\int_0^{\frac{l}{2}} M_x \frac{\partial M_x}{\partial X} dx$$

$$= \frac{2}{EI}\int_0^{\frac{l}{2}} \left\{\frac{1}{2}(ql - X)x - \frac{1}{2}qx^2\right\}\left(-\frac{1}{2}x\right)dx$$

$$= \frac{1}{2EI}\int_0^{\frac{l}{2}} \left\{qx^3 - (ql - X)x^2\right\} dx$$

$$= \frac{1}{2EI}\left(\frac{ql^4}{64} - \frac{ql^4}{24} + \frac{Xl^4}{24}\right)$$

最小仕事の原理より

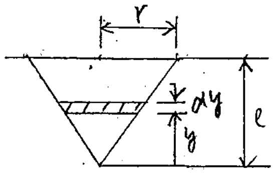
$$\frac{\partial U}{\partial X} = 0$$

$$\frac{ql^4}{64} - \frac{ql^4}{24} + \frac{Xl^4}{24} = 0 \text{ より}$$

$$X = \frac{5}{8}ql = R_B$$

【PEL　原稿　フォーマット】
32 字×38 行に設定。句読点はできれば「，。」（カンマ，丸）に。書体は明朝・10.5P で結構です。

演習問題 B-1 の解答



円錐の頂点からyの位置の断面積と、頂点からyの間の体積は次式で表される。

$$A = \frac{\pi r^2}{l^2} y^2$$

$$V = \frac{\pi r^2}{3 l^2} y^3$$

厚さdyの部分に作用する軸力をNとすると、

$$N = \rho g V = \frac{\rho g \pi r^2}{3 l^2} y^3$$

厚さdyの部分のひずみエネルギーをdUとすると、

$$dU = \frac{N^2}{2EA} dy = \frac{1}{2E}\left(\frac{\rho g \pi r^2}{3 l^2} y^3\right)^2 dy \Big/ \left(\frac{\pi r^2}{l^2} y^2\right)$$

$$= \left(\frac{\rho^2 g^2 \pi r^2}{18 E l^2} y^4\right) dy$$

部材全体のひずみエネルギーをUとすると

$$U = \int dU$$

$$= \int_0^l \frac{\rho^2 g^2 \pi r^2}{18 E l^2} y^4 dy$$

$$= \frac{\pi \rho^2 g^2 r^2}{18 E l^2} \int_0^l y^4 dy$$

$$= \frac{\pi \rho^2 g^2 r^2 l^3}{90 E}$$

【PEL 原稿 フォーマット】
32 字×38 行に設定。句読点はできれば「,。」(カンマ，丸) に。書体は
明朝・10.5P で結構です。

演習問題 B-2 の解答

実荷重による部材力

$\Sigma V_A = 0$ より

$$N_{AD} \times \frac{4}{5} + R_A = 0$$

$$N_{AD} = -\frac{3}{4}P \times \frac{5}{4} = -\frac{15}{16}P$$

$\Sigma H_A = 0$ より

$$N_{AD} \times \frac{3}{5} + N_{AC} = 0$$

$$N_{AC} = -\left(-\frac{15}{16}P\right) \times \frac{3}{5} = \frac{9}{16}P$$

$\Sigma V_B = 0$ より

$$N_{BE} \times \frac{4}{5} + R_B = 0$$

$$N_{BE} = -\frac{P}{4} \times \frac{5}{4} = -\frac{5}{16}P$$

$\Sigma H_B = 0$ より

$$N_{BC} = \frac{3}{16}P$$

$\Sigma V_E = 0$ より

$$-N_{BE} \times \frac{4}{5} - N_{CE} \times \frac{4}{5} = 0$$

$$N_{CE} = -N_{BE} = \frac{5}{16}P$$

$\Sigma H_E = 0$ より

$$-N_{DE} + N_{BE} \times \frac{3}{5} - N_{CE} \times \frac{3}{5} = 0$$

$$N_{DE} = -\frac{5}{16}P \times \frac{3}{5} - \frac{5}{16}P \times \frac{3}{5}$$

$$= -\frac{3}{8}P$$

$$S_{CD} = -S_{CE} = -\frac{5}{16}P$$

点 C に単位の仮想荷重を作用させたときの軸力

$\Sigma V_A = 0$ より

$$\bar{N}_{AD} \times \frac{4}{5} + \frac{1}{2} = 0$$

$$\bar{N}_{AD} = -\frac{1}{2} \times \frac{5}{4} = -\frac{5}{8} = \bar{N}_{BE}$$

$\Sigma H_A = 0$ より

$$\bar{N}_{AD} \times \frac{3}{5} + \bar{N}_{AC} = 0$$

$$\bar{N}_{AC} = -\left(-\frac{5}{8}\right) \times \frac{3}{5} = \frac{3}{8} = \bar{N}_{BC}$$

$\Sigma V_D = 0$ より

$$\bar{N}_{CD} = -\bar{N}_{AD} = \frac{5}{8} = \bar{N}_{CE}$$

$\Sigma H_D = 0$ より

$$\bar{N}_{DE} + \bar{N}_{CD} \times \frac{3}{5} - \bar{N}_{AD} \times \frac{3}{5} = 0$$

$$\bar{N}_{DE} = -\frac{5}{8} \times \frac{3}{5} - \frac{5}{8} \times \frac{3}{5}$$

$$= -\frac{3}{4}$$

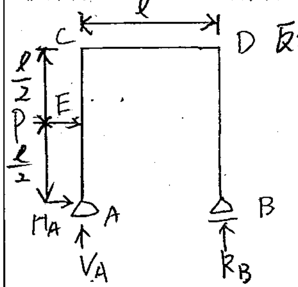
部材	N	$\bar{N}$	S	$N\bar{N}S$
AC	9/16 P	3/8	6	162/128 P
AD	-15/16 P	-5/8	5	375/128 P
CD	-15/16 P	5/8	5	-375/128 P
CE	5/16 P	5/8	5	125/128 P
DE	-3/8 P	-3/4	6	27/16 P
BC	3/16 P	3/8	6	27/64 P
BE	-5/16 P	-5/8	5	125/128 P

合計 $\frac{341}{64}P$

よって $\delta_C = \frac{341P}{64EA}$

【PEL　原稿　フォーマット】
32 字×38 行に設定。句読点はできれば「，。」（カンマ，丸）に。書体は明朝・10.5P で結構です。

演習問題 B-3 の解答



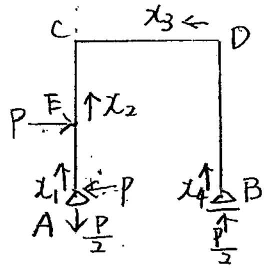
反力を図のように仮定する.

$$\ell V_A + \frac{\ell}{2}\cdot P = 0$$

$$V_A = -\frac{P}{2}$$

$$R_B = \frac{P}{2}$$

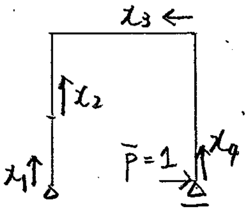
$$H_A = -P$$



実荷重による曲げモーメント

$(0 \leqq x_1 \leqq \frac{\ell}{2})$　$M_{x_1} = Px_1$　　$(0 \leqq x_2 \leqq \frac{\ell}{2})$　$M_{x_2} = \frac{P\ell}{2}$

$(0 \leqq x_3 \leqq \ell)$　$M_{x_3} = \frac{P}{2}x_3$　　$(0 \leqq x_4 \leqq \ell)$　$M_{x_4} = 0$



仮想荷重による曲げモーメント

$(0 \leqq x_1 \leqq \frac{\ell}{2})$　$\overline{M}_{x_1} = x_1$　　$(0 \leqq x_2 \leqq \frac{\ell}{2})$　$\overline{M}_{x_2} = \frac{\ell}{2} + x_2$

$(0 \leqq x_3 \leqq \ell)$　$\overline{M}_{x_3} = \ell$　　$(0 \leqq x_4 \leqq \ell)$　$\overline{M}_{x_4} = x_4$

仮想仕事の原理より

$$\delta_B = \int_0^{\frac{\ell}{2}} \frac{M_{x_1}\overline{M}_{x_1}}{EI}dx_1 + \int_0^{\frac{\ell}{2}} \frac{M_{x_2}\overline{M}_{x_2}}{EI}dx_2 + \int_0^{\ell} \frac{M_{x_3}\overline{M}_{x_3}}{EI}dx + \int_0^{\ell} \frac{M_{x_4}\overline{M}_{x_4}}{EI}dx$$

$$= \frac{1}{EI}\left\{\int_0^{\frac{\ell}{2}} (Px_1)x_1 dx_1 + \int_0^{\frac{\ell}{2}} \left(\frac{P\ell}{2}\right)\left(\frac{\ell}{2}+x_2\right)dx_2 + \int_0^{\ell}\left(\frac{P}{2}x_3\right)\ell\, dx_3 + \int_0^{\ell} 0 \cdot x_4\, dx_4\right.$$

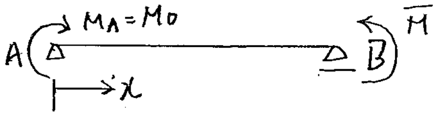
$$= \frac{1}{EI}\left\{P\left[\frac{1}{3}x_1^3\right]_0^{\frac{\ell}{2}} + \frac{P}{4}\ell^2\left[x_2\right]_0^{\frac{\ell}{2}} + \frac{P\ell}{2}\left[\frac{x_2^2}{2}\right]_0^{\frac{\ell}{2}} + \frac{P}{2}\left[\frac{x_3^2}{2}\right]_0^{\ell}\right\}$$

$$= \frac{P\ell^3}{EI}\left(\frac{1}{24} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{1}{4}\right)$$

$$= \frac{23P\ell^3}{48EI}$$

【PEL　原稿　フォーマット】
32 字×38 行に設定。句読点はできれば「，。」（カンマ，丸）に。書体は明朝・10.5P で結構です。

演習問題 B-4 の解答



点Bに仮想のモーメント外力 $\bar{M}$ を考える。

$$M_x = M_A + (\bar{M} - M_A)\frac{x}{l} \quad , \quad \frac{\partial M_x}{\partial \bar{M}} = \frac{x}{l}$$

$$U = \int_0^l \frac{M_x^2}{2EI}dx$$

$$\frac{\partial U}{\partial \bar{M}} = \frac{1}{2EI}\int_0^l 2M_x \frac{\partial M_x}{\partial \bar{M}}dx$$

$$= \frac{1}{EI}\int_0^l \left\{M_A + (\bar{M} - M_A)\frac{x}{l}\right\}\left(\frac{x}{l}\right)dx$$

ここで、$M_A = M_0$, $\bar{M} = 0$ を代入する。

$$\frac{\partial U}{\partial \bar{M}} = \frac{1}{EI}\int_0^l \left(M_0 - M_0\frac{x}{l}\right)\left(\frac{x}{l}\right)dx$$

$$= \frac{1}{EI}\int_0^l \left(\frac{M_0}{l}x - \frac{M_0}{l^2}x^2\right)dx$$

$$= \frac{M_0 l}{6EI}$$

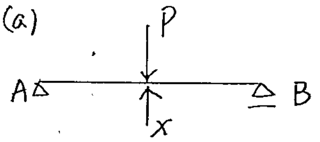
$\bar{M}$ は反時計まわりに作用させている。たわみ角の定義より

$$\theta_B = -\frac{M_0 l}{6EI}$$

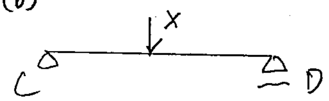
【PEL　原稿　フォーマット】
32 字×38 行に設定。句読点はできれば「,。」(カンマ，丸)に。書体は明朝・10.5P で結構です。

演習問題 B-5の解答

(a)



(b)



全体の系を(a)と(b)の系に分けて考える。

$$\frac{\partial U_a}{\partial X} = \frac{2}{EI}\int_0^{\frac{l}{2}} \left(\frac{P-X}{2}\right)x\left(-\frac{1}{2}x\right)dx.$$

$$= \frac{-(P-X)}{2EI}\int_0^{\frac{l}{2}} x^2\,dx.$$

$$= \frac{X-P}{48EI}l^3$$

$$\frac{\partial U_b}{\partial X} = \frac{X}{48\times(3EI)}l^3 = \frac{X}{144EI}l^3$$

$$\frac{\partial U}{\partial X} = \frac{\partial U_a}{\partial X} + \frac{\partial U_b}{\partial X}$$

$$= \frac{X-P}{48EI}l^3 + \frac{X}{144EI}l^3$$

最小仕事の原理より

$$\frac{\partial U}{\partial X} = 0$$

$$\frac{X-P}{48EI}l^3 + \frac{X}{144EI}l^3 = 0$$

よって $X = \frac{3}{4}P$

$$\delta_E = \frac{\partial U_b}{\partial X} = \frac{\frac{3}{4}Pl^3}{144EI} = \frac{Pl^3}{192EI}$$