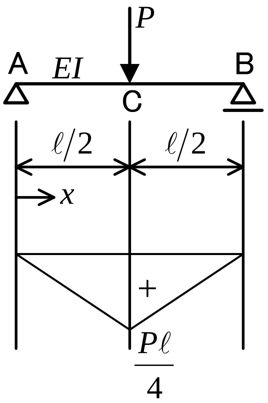
構造力学第１３章 Web にリンク

13-2 節　余力法

予習

(1) v_C，θ_B（仮想仕事の原理）

［実系］



M図

支点反力

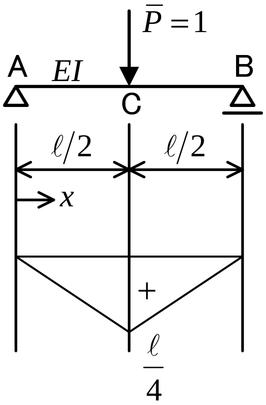
$$V_A = V_B = \frac{P}{2}$$

曲げモーメント

$$M = V_A x = \frac{P}{2}x \quad （0 \le x \le \frac{\ell}{2}）$$

$$M = V_B(\ell - x) = \frac{P}{2}(\ell - x) \quad （0 \le x \le \frac{\ell}{2}）$$

［仮想系１］ v_C（点Ｃに鉛直下向きに単位仮想集中荷重）



$\bar{M}$図

支点反力

$$\bar{V}_A = \bar{V}_B = \frac{\bar{P}}{2} = \frac{1}{2}$$

曲げモーメント

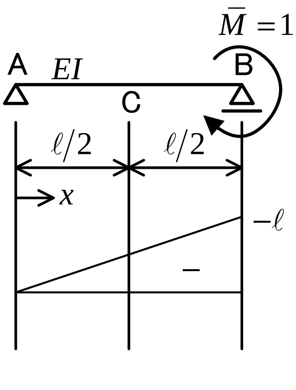
$$\bar{M} = \bar{V}_A x = \frac{x}{2} \quad （0 \le x \le \frac{\ell}{2}）$$

$$\bar{M} = \bar{V}_B(\ell - x) = \frac{\ell - x}{2} \quad （0 \le x \le \frac{\ell}{2}）$$

仮想仕事の原理より，中央点Ｃの鉛直たわみ

$$\bar{P} \bullet v_C = v_C = \int \frac{\bar{M}M}{EI}dx = \int_0^{\ell/2} \frac{1}{EI}\left(\frac{x}{2}\right)\left(\frac{P}{2}x\right)dx + \int_{\ell/2}^{\ell} \frac{1}{EI}\left(\frac{\ell - x}{2}\right)\left\{\frac{P}{2}(\ell - x)\right\}dx = \frac{P\ell^3}{48EI}$$

［仮想系２］ θ_B（支点Ｂに時計回りの単位仮想モーメント荷重）



$\bar{M}$図

支点反力

$$\bar{V}_A = -\frac{\bar{M}}{\ell} = -\frac{1}{\ell}，\quad \bar{V}_B = \frac{1}{\ell}$$

曲げモーメント

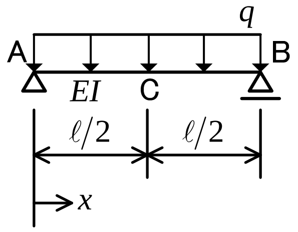
$$\bar{M} = \bar{V}_A x = -\frac{x}{\ell} \quad （0 \le x \le \ell）$$

したがって，支点Ｂのたわみ角（時計まわり＋）

$$\bar{M}\bullet\theta_B=\theta_B=\int\frac{\bar{M}M}{EI}dx=\int_0^{\ell/2}\frac{1}{EI}\left(-\frac{x}{\ell}\right)\left(\frac{P}{2}x\right)dx+\int_{\ell/2}^{\ell}\frac{1}{EI}\left(-\frac{x}{\ell}\right)\left\{\frac{P}{2}(\ell-x)\right\}dx$$

$$=-\frac{P\ell^2}{16EI}$$

(2) v_C， θ_A（微分方程式法）



支点反力

$$V_A=V_B=\frac{q\ell}{2}$$

曲げモーメント

$$M=V_Ax-\frac{qx^2}{2}=\frac{q\ell}{2}x-\frac{qx^2}{2}\quad (0\le x\le\ell)$$

（鉛直）たわみ v の微分方程式を下記境界条件の下で解く

$$EIv''=-M=\frac{qx^2}{2}-\frac{q\ell}{2}x\quad (0\le x\le\ell)$$

境界条件

　支点Ａ（$x=0$）：たわみ $v_A=0$

　支点Ｂ（$x=\ell$）：たわみ $v_B=0$

つまり，積分定数を C_1， C_2 とおくと，

$$EIv'=\frac{qx^3}{6}-\frac{q\ell}{4}x^2+C_1$$

$$EIv=\frac{qx^4}{24}-\frac{q\ell}{12}x^3+C_1x+C_2$$

上記境界条件より， $C_1=\frac{q\ell^3}{24}$， $C_2=0$，よって，たわみ v，たわみ角 $v'=\theta$ は，

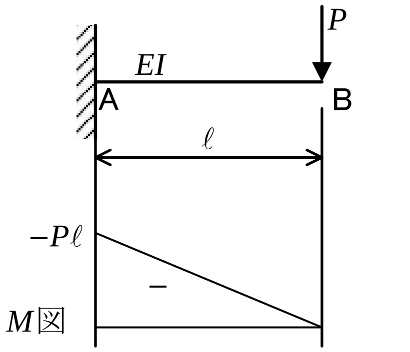
$$EIv'=EI\theta=\frac{qx^3}{6}-\frac{q\ell}{4}x^2+\frac{q\ell^3}{24}$$

$$EIv=\frac{qx^4}{24}-\frac{q\ell}{12}x^3+\frac{q\ell^3}{24}x$$

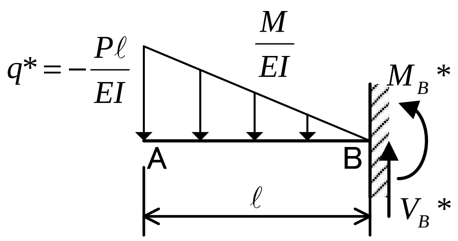
これより，

$$v_C=v\left(x=\frac{\ell}{2}\right)=\frac{5q\ell^4}{384EI},\quad \theta_A=\theta(x=0)=\frac{q\ell^3}{24EI}$$

(3) v_B， θ_B （弾性荷重法）



当該の問題の曲げモーメント図を曲げ剛性 EI で除したものを分布荷重（弾性荷重）として，対応する「共役ばり」に作用させる。そのとき,「モールの定理」より，たわみ δ_B， θ_B はそれぞれ共役ばりのＢ点の曲げモーメント M_B *，せん断力 Q_B *より求めることができる：



弾性荷重（最大値）

$$q^* = -\frac{P\ell}{EI}$$

支点反力

$$V_B{}^* = \frac{1}{2}q^*\ell,\quad M_B{}^* = -\frac{1}{2}q^*\ell\times\frac{2}{3}\ell = -\frac{q^*\ell^2}{3}$$

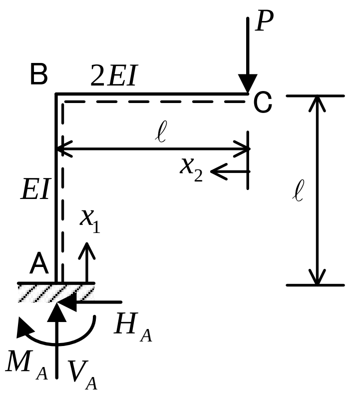
自由端Ｂのたわみ

$$v_B = M_B{}^* = \left(-\frac{q^*\ell^2}{3}\right) = \frac{P\ell^3}{3EI}$$

自由端のたわみ角（時計回りを正）

$$\theta_B = Q_B{}^* = -R_B{}^* = -\frac{1}{2}q^*\ell = \frac{P\ell^2}{2EI}$$

(4) v_C， θ_C （カステリアーノの定理）



点Ｃの鉛直たわみ v_C を求めるためには，点Ｃに鉛直下向きの集中荷重が作用する系（当該問題そのもの）を考える。

支点反力

$$\sum H = 0 \ :\ H_A = 0$$
$$\sum V = 0 \ :\ V_A = P$$
$$\sum_A M = 0 \ :\ M_A + P\ell = 0 \ \rightarrow\ M_A = P\ell$$

断面力（曲げモーメント）

(i)柱ＡＢ（ $0 \le x_1 \le \ell$ ）

$$M = M_A = -P\ell \ \rightarrow\ \frac{\partial M}{\partial P} = -\ell$$

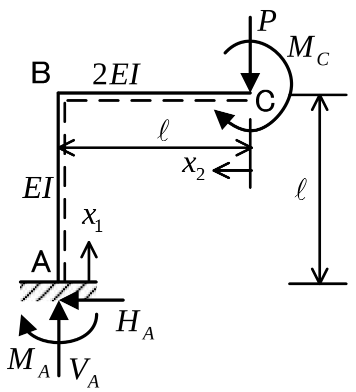
(ii)はりＣＢ（$0 \le x_2 \le \ell$）

$$M = -Px_2 \;\rightarrow\; \frac{\partial M}{\partial P} = -x_2$$

カステリアーノの定理より，

$$v_C = \frac{\partial U}{\partial P} = \int \frac{M}{EI}\frac{\partial M}{\partial P}dx = \int_0^{\ell}\frac{1}{EI}(-P\ell)(-\ell)dx_1 + \int_0^{\ell}\frac{1}{2EI}(-Px_2)(-x_2)dx_2$$

$$= \frac{7P\ell^3}{6EI}$$



また，点Ｃのたわみ角 θ_C（時計回りを正）を求めるためには，
点Ｃに時計回りのモーメント荷重 M_C を付加した系を考える。

支点反力

$$\sum H = 0 \;:\; H_A = 0$$
$$\sum V = 0 \;:\; V_A = P$$
$$\sum_A M = 0 \;:\; M_A + P\ell + M_C = 0 \;\rightarrow\; M_A = P\ell - M_C$$

断面力（曲げモーメント）

(i)柱ＡＢ（$0 \le x_1 \le \ell$）

$$M = M_A = -P\ell - M_C \;\rightarrow\; \frac{\partial M}{\partial M_C} = -1$$

(ii)はりＣＢ（$0 \le x_2 \le \ell$）

$$M = -Px_2 - M_C \;\rightarrow\; \frac{\partial M}{\partial M_C} = -1$$

カステリアーノの定理より，

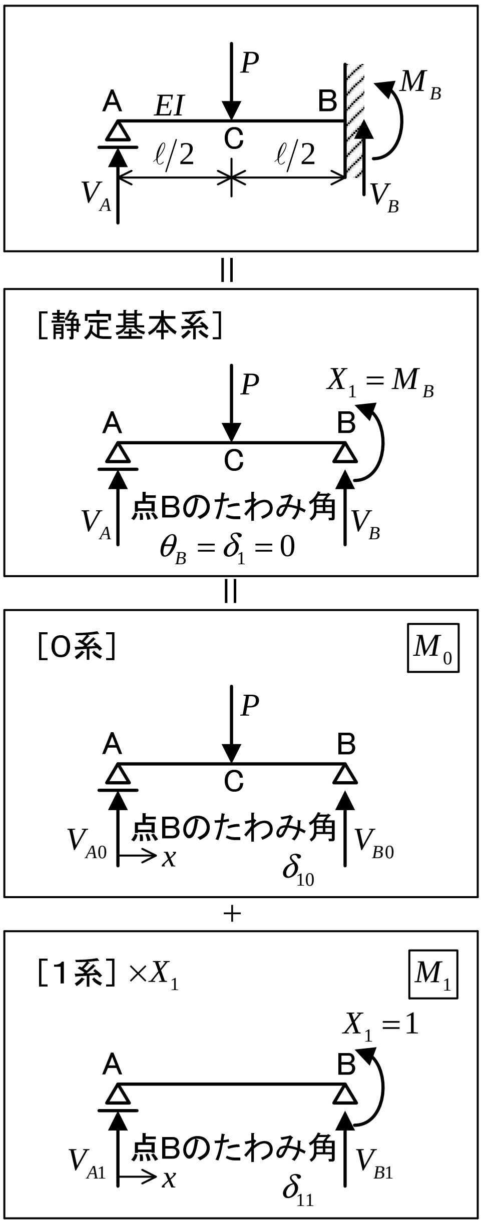
$$\theta_C = \left.\frac{\partial U}{\partial M_C}\right|_{M_C=0} = \int \frac{\left.M\right|_{M_C=0}}{EI}\frac{\partial M}{\partial M_C}dx = \int_0^{\ell}\frac{1}{EI}(-P\ell)(-1)dx_1 + \int_0^{\ell}\frac{1}{2EI}(-Px_2)(-1)dx_2$$

$$= \frac{5P\ell^2}{4EI}$$

演習問題Ａ

13-2-A1

(1)



適合条件式

点Bのたわみ角

$\theta_B = \delta_1 = \delta_{10} + \delta_{11} X_1 = 0$

余力法

不静定次数

$r = 4$，$h = 0$ → $n = r - 3 - h = 1$：１次不静定

不静定力（余力） $X_1 = M_B$

静定基本系＝単純ばりＡＢ

適合条件式（支点Ｂのたわみ角） $\theta_B = \delta_1 = 0$

［０系］静定基本系に元の荷重

支点反力

$$V_{A0} = V_{B0} = \frac{P}{2}$$

曲げモーメント

$$M_0 = V_{A0} x = \frac{P}{2} x \quad \left(0 \le x \le \frac{\ell}{2}\right)$$

$$M_0 = V_{B0}(\ell - x) = \frac{P}{2}(\ell - x) \quad \left(\frac{\ell}{2} \le x \le \ell\right)$$

［１系］静定基本系に余力

支点反力

$$V_{A1} = \frac{X_1}{\ell} = \frac{1}{\ell}, \quad V_{B1} = -\frac{1}{\ell}$$

曲げモーメント

$$M_1 = R_{A1} x = \frac{x}{\ell} \quad (0 \le x \le \ell)$$

このとき，

$$\theta_{10} = \int \frac{M_1 M_0}{EI} dx = \int_0^{\ell/2} \frac{1}{EI}\left(\frac{x}{\ell}\right)\left(\frac{P}{2}x\right) dx + \int_{\ell/2}^{\ell} \frac{1}{EI}\left(\frac{x}{\ell}\right)\left\{\frac{P}{2}(\ell - x)\right\} dx = \frac{P\ell^3}{16EI}$$

$$\theta_{11} = \int \frac{M_1 M_1}{EI} dx = \int_0^{\ell} \frac{1}{EI}\left(\frac{x}{\ell}\right)^2 dx = \frac{\ell}{3EI}$$

したがって，適合条件式$\theta_B = \delta_1 = \delta_{10} + \delta_{11} X_1 = 0$より，

$$\frac{P\ell^3}{16EI} + \frac{\ell}{3EI} X_1 = 0 \;\rightarrow\; X_1 = -\frac{3}{16} P\ell = M_B$$

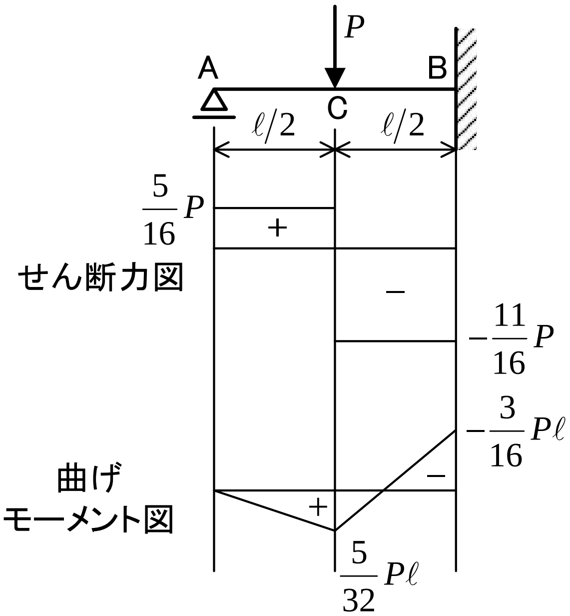
ゆえに，
支点反力

$$V_A = V_{A0} + V_{A1} X_1 = \frac{5}{16} P\text{，}\quad V_B = V_{B0} + V_{B1} X_1 = \frac{11}{16} P \qquad \text{（もちろん，} V_A + V_B = P \;\rightarrow\; \text{ＯＫ）}$$

断面力

$$Q = Q_0 + Q_1 X_1\text{，}\quad M = M_0 + M_1 X_1$$

断面力図



$$Q_A = V_A = \frac{5}{16} P$$

$$Q_C^- = Q_A = \frac{5}{16} P\text{，}\quad Q_C^+ = Q_C^- - P = -\frac{11}{16} P$$

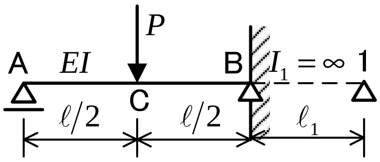
$$Q_B = Q_C^+ = -\frac{11}{16} P = -V_B$$

$$M_A = 0$$

$$M_C = M_A + \frac{5}{16} P \times \frac{\ell}{2} = \frac{5}{32} P\ell$$

$$M_B = M_C + \left(-\frac{11}{16} P\right) \times \frac{\ell}{2} = -\frac{3}{16} P\ell$$

参考１（三連モーメント法）



固定端Ｂを図のような剛性無限大のはりと考え，３連続支点ＡＢＯに対し，三連モーメント式を立てる。

$$\left(\frac{\ell}{I}\right)M_A + 2\left(\frac{\ell}{I} + \frac{\ell_1}{I_1}\right)M_B + \left(\frac{\ell_1}{I_1}\right)M_1 = 6E\left(\theta_B^L - \theta_B^R\right)$$

ここで，$M_A = 0$，$I_1 = \infty$ で，$\theta_B^L = -\dfrac{P\ell^2}{16EI}$，$\theta_B^R = 0$ とおくと，

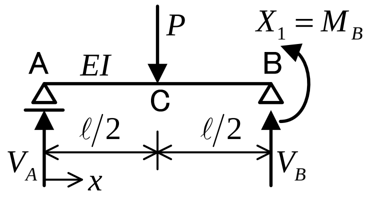
$$2M_B = \frac{6EI}{\ell}\left(-\frac{P\ell}{16EI}\right) \rightarrow M_B = -\frac{3}{16}P\ell$$

支点反力

$$V_A = \frac{P}{2} + \frac{M_B}{\ell} = \frac{5}{16}P,\quad V_B = \frac{P}{2} - \frac{M_B}{\ell} = \frac{11}{16}P$$

参考２（カステリアーノの定理：最小仕事の原理）

［静定基本系］



余力法と同様に，
不静定力（余力）$X_1 = M_B$
静定基本系＝単純ばりＡＢ
このとき，

支点反力

$$V_A = \frac{P}{2} + \frac{X_1}{\ell},\quad V_B = \frac{P}{2} - \frac{X_1}{\ell}$$

曲げモーメント

$$M = V_A x = \frac{P}{2}x + \frac{X_1}{\ell}x \quad \left(0 \le x \le \frac{\ell}{2}\right) \quad \rightarrow \quad \frac{\partial M}{\partial X_1} = \frac{x}{\ell}$$

$$M = V_B(\ell - x) + X_1 = \frac{P}{2}(\ell - x) + \frac{X_1}{\ell}x \quad \left(\frac{\ell}{2} \le x \le \ell\right) \quad \rightarrow \quad \frac{\partial M}{\partial X_1} = \frac{x}{\ell}$$

X_1は不静定力であるので，最小仕事の原理より，支点Ｂのたわみ角θ_Bは，

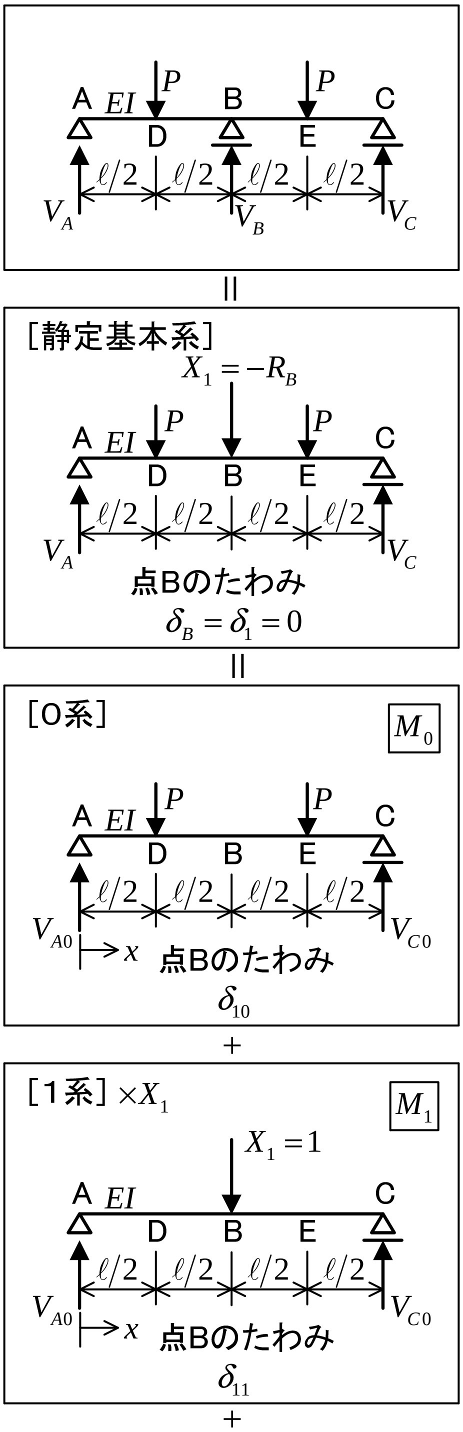
$$\begin{aligned}
\theta_B = 0 = \frac{\partial U}{\partial X_1} &= \int \frac{M}{EI}\frac{\partial M}{\partial X_1}dx \\
&= \int_0^{\ell/2} \frac{1}{EI}\left(\frac{P}{2}x + \frac{X_1}{\ell}x\right)\left(\frac{x}{\ell}\right)dx + \int_{\ell/2}^{\ell} \frac{1}{EI}\left\{\frac{P}{2}(\ell - x) + \frac{X_1}{\ell}x\right\}\left(\frac{x}{\ell}\right)dx \\
&= \left[\int_0^{\ell/2} \frac{1}{EI}\left(\frac{P}{2}x\right)\left(\frac{x}{\ell}\right)dx + \int_{\ell/2}^{\ell} \frac{1}{EI}\left\{\frac{P}{2}(\ell - x)\right\}\left(\frac{x}{\ell}\right)dx\right] \\
&\quad + \left[\int_0^{\ell/2} \frac{1}{EI}\left(\frac{x}{\ell}\right)^2 dx + \int_{\ell/2}^{\ell} \frac{1}{EI}\left(\frac{x}{\ell}\right)^2 dx\right] X_1
\end{aligned}$$

ここで，余力法における［０系］，［１系］のたわみ角θ_{10}，θ_{11}の標記を借りると、上式は

$$\theta_B = 0 = \frac{\partial U}{\partial X_1} = \theta_{10} + \theta_{11}X_1$$

となる。つまり，ここでの最小仕事の原理は対応する余力法に完全に等価である。

(2)



適合条件式

点Bのたわみ

$\delta_B = \delta_1 = \delta_{10} + \delta_{11} X_1 = 0$

余力法

不静定次数

$r=4$，$h=0$ → $n=r-3-h=1$ ： 1次不静定

不静定力（余力） $X_1 = -V_B$

静定基本系＝単純ばりＡＣ

適合条件式（支点Ｂのたわみ） $\delta_B = 0$

［０系]静定基本系に元の荷重(支点Ｂで左右対称)

支点反力

$$V_{A0} = V_{B0} = P$$

曲げモーメント

$$M_0 = V_{A0} x = Px \quad (0 \le x \le \frac{\ell}{2})$$

$$M_0 = V_{A0} x - P\left(x - \frac{\ell}{2}\right) = \frac{P\ell}{2} \quad (\frac{\ell}{2} \le x \le \ell)$$

［１系］静定基本系に余力（支点Ｂで左右対称）

支点反力

$$V_{A1} = V_{B1} = \frac{X_1}{2} = \frac{1}{2}$$

曲げモーメント

$$M_1 = V_{A1} x = \frac{x}{2} \quad (0 \le x \le \ell)$$

このとき，

$$\delta_{10} = \int \frac{M_1 M_0}{EI} dx = 2 \times \int_0^{\ell/2} \frac{1}{EI} \left(\frac{x}{\ell} \right) (Px) dx + 2 \times \int_{\ell/2}^{\ell} \frac{1}{EI} \left(\frac{x}{2} \right) \left\{ \frac{P\ell}{2} \right\} dx = \frac{11P\ell^3}{48EI}$$

$$\delta_{11} = \int \frac{M_1 M_1}{EI} dx = 2 \times \int_0^{\ell} \frac{1}{EI} \left(\frac{x}{2} \right)^2 dx = \frac{\ell^3}{6EI}$$

したがって，適合条件式 $\delta_B = \delta_1 = \delta_{10} + \delta_{11} X_1 = 0$ より，

$$\frac{P\ell^3}{48EI} + \frac{\ell^3}{6EI} X_1 = 0 \ \rightarrow \ X_1 = -\frac{11}{8} P \ \rightarrow \ V_B = -X_1 = \frac{11}{8} P$$

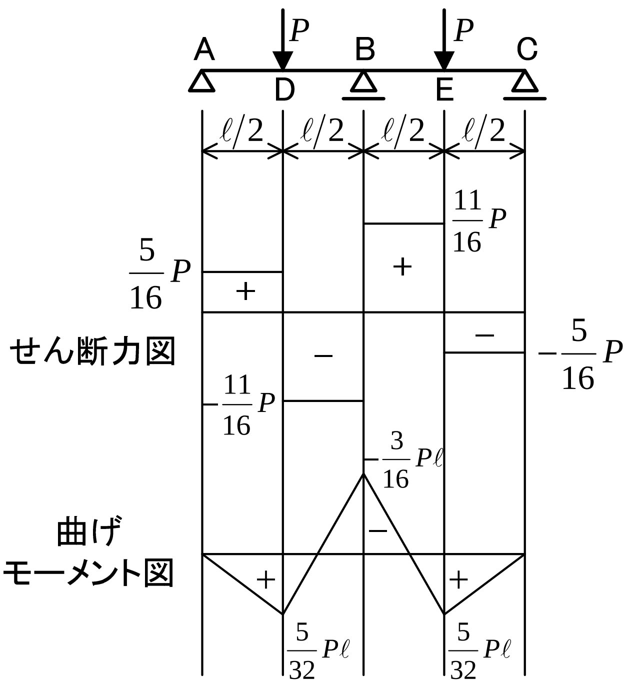
ゆえに，
支点反力

$$V_A = V_{A0} + V_{A1} X_1 = \frac{5}{16} P, \quad V_C = V_{C0} + V_{C1} X_1 = \frac{5}{16} P$$ （もちろん $V_A + V_B + V_C = 2P \rightarrow$ ＯＫ）

断面力

$$Q = Q_0 + Q_1 X_1, \quad M = M_0 + M_1 X_1$$

断面力図



$$Q_A = V_A = \frac{5}{16} P$$

$$Q_D^- = Q_A = \frac{5}{16} P, \quad Q_D^+ = Q_D^- - P = -\frac{11}{16} P$$

$$Q_B^- = Q_C^+ = -\frac{11}{16} P, \quad Q_B^+ = Q_B^- + V_B = \frac{11}{16} P$$

$$Q_E^- = Q_B^+ = \frac{11}{16} P, \quad Q_E^+ = Q_E^- - P = -\frac{5}{16} P$$

$$Q_C = Q_E^+ = -\frac{5}{16} P = -V_C \ \rightarrow \ \text{ＯＫ}$$

$$M_A = 0$$

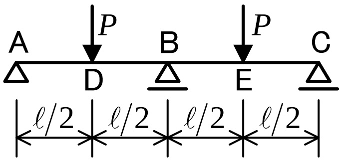
$$M_D = M_A + \frac{5}{16} P \times \frac{\ell}{2} = \frac{5}{32} P\ell$$

$$M_B = M_C + \left(-\frac{11}{16} P \right) \times \frac{\ell}{2} = -\frac{3}{16} P\ell$$

$$M_E = M_B + \frac{11}{16} P \times \frac{\ell}{2} = \frac{5}{32} P\ell$$

$$M_C = M_E + \left(-\frac{5}{16} P \right) \times \frac{\ell}{2} = 0 \ \rightarrow \ \text{ＯＫ}$$

参考１（三連モーメント法）



三連モーメント式（はりＡ－Ｂ－Ｃ：支点Ｂ）

$$\left(\frac{\ell}{I}\right)M_A+2\left(\frac{\ell}{I}+\frac{\ell}{I}\right)M_B+\left(\frac{\ell}{I}\right)M_1=6E\left(\theta_B^L-\theta_B^R\right)$$

ここで，$M_A=0$，$M_C=0$で，$\theta_B^L=-\frac{P\ell^2}{16EI}$，$\theta_B^R=-\frac{P\ell^2}{16EI}$とおくと，

$$M_B=-\frac{3}{16}P\ell$$

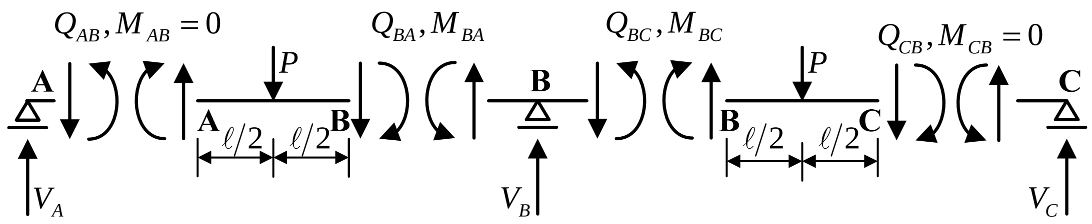
支点反力

$$V_A=\frac{P}{2}+\frac{M_B}{\ell}=\frac{5}{16}P$$

$$V_B=\left(\frac{P}{2}-\frac{M_B}{\ell}\right)+\left(\frac{P}{2}-\frac{M_B}{\ell}\right)=\frac{11}{8}P$$

$$V_C=\frac{P}{2}+\frac{M_B}{\ell}=\frac{5}{16}P$$

参考２（たわみ角法）



基準剛度 $K_0=\dfrac{I}{\ell}$

剛比　$k_{AB}=k_{BC}=1$

部材回転角はすべて生じない

たわみ角式

(i)部材ＡＢ（左端ヒンジ）

$$M_{AB}=0,\quad M_{BA}=1\left(\frac{3}{2}\varphi_B\right)+H_{BA}=\frac{3}{2}\varphi_B+\frac{3}{16}P\ell$$

(ii)部材ＢＣ（右端ヒンジ）

$$M_{BC}=1\left(\frac{3}{2}\varphi_B\right)+H_{BC}=\frac{3}{2}\varphi_B-\frac{3}{16}P\ell,\quad M_{CB}=0$$

節点方程式（節点Ｂ）

$$M_{BA}+M_{BC}=0\ \rightarrow\ \varphi_B=0$$ （たわみを支点Ｂで左右対称）

材端曲げモーメント

(i)部材ＡＢ

$$M_{AB}=0,\quad M_{BA}=\frac{3}{16}P\ell$$

(ii)部材ＢＣ（右端ヒンジ）

$$M_{BC}=-\frac{3}{16}P\ell,\quad M_{CB}=0$$

材端せん断力

(i)部材ＡＢ

$$\sum M_{(A)}=0\ :\ P\times\frac{\ell}{2}+Q_{BA}\ell+M_{BA}=0\ \rightarrow\ Q_{BA}=-\frac{M_{BA}}{\ell}-\frac{P}{2}=-\frac{11}{16}P$$

$$\sum V=0\ :\ Q_{AB}-P-Q_{BA}=0\ \rightarrow\ Q_{AB}=P+Q_{BA}=\frac{5}{16}P$$

(ii)部材ＢＣ

$$\sum M_{(C)}=0\ :\ M_{BC}+Q_{BC}\ell-P\times\frac{\ell}{2}=0\ \rightarrow\ Q_{BC}=-\frac{M_{BC}}{\ell}+\frac{P}{2}=\frac{11}{16}P$$

$$\sum V = 0 \ : \ Q_{BC} - P - Q_{CB} = 0 \ \rightarrow \ Q_{CB} = Q_{BC} - P = -\frac{5}{16}P$$

支点反力

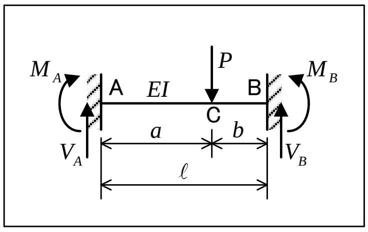
$$V_A = Q_{AB} = \frac{5}{16}P$$

$$V_B = Q_{BC} - Q_{BA} = \frac{11}{16}P - \left(-\frac{11}{16}P\right) = \frac{11}{8}P$$

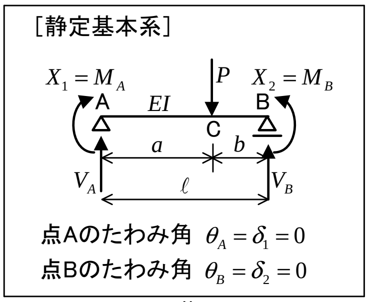
$$V_C = -Q_{CB} = \frac{5}{16}P$$

演習問題Ｂ

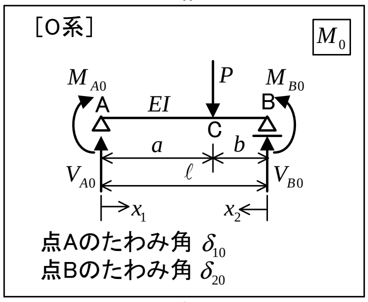
13-2-B1



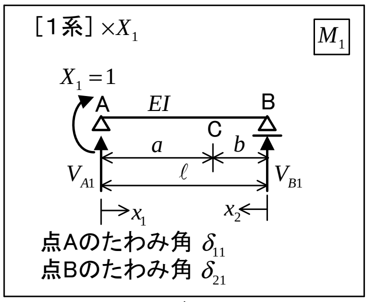
＝



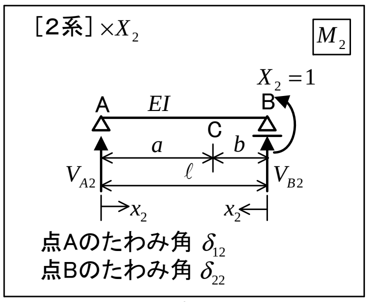
＝



＋



＋



＋

適合条件式

点Aのたわみ角

$$\theta_A = \delta_1 = \delta_{10} + \delta_{11} X_1 + \delta_{12} X_2 = 0$$

点Bのたわみ角

$$\theta_B = \delta_2 = \delta_{20} + \delta_{21} X_1 + \delta_{22} X_2 = 0$$

(1)

余力法

不静定次数（鉛直方向の荷重のみ）

$r = 4$，$h = 0$ → $n = r - 2 - h = 2$ ：２次不静定

不静定力（余力）$X_1 = M_A$，$X_2 = M_B$

静定基本系＝単純ばりＡＢ

適合条件式（支点Ａ，Ｂのたわみ角）$\theta_A = 0$，$\theta_B = 0$

［０系］静定基本系に元の荷重

支点反力

$$V_{A0} = \frac{Pb}{\ell}, \quad V_{B0} = \frac{Pa}{\ell}$$

曲げモーメント

$$M_0 = V_{A0} x_1 = \frac{Pb}{\ell} x_1 \quad (0 \le x_1 \le a)$$

$$M_0 = V_{B0} x_2 = \frac{Pa}{\ell} x_2 \quad (0 \le x_2 \le b)$$

［１系］静定基本系に余力 X_1

支点反力

$$V_{A1} = -\frac{X_1}{\ell} = -\frac{1}{\ell}, \quad V_{B1} = \frac{1}{\ell}$$

曲げモーメント

$$M_1 = X_1 + V_{A1} x_1 = \frac{\ell - x_1}{\ell} \quad (0 \le x_1 \le a)$$

$$M_1 = V_{B1} x_2 = \frac{x_2}{\ell} \quad (0 \le x_2 \le b)$$

［２系］静定基本系に余力 X_2

支点反力

$$V_{A1} = \frac{X_2}{\ell} = \frac{1}{\ell}, \quad V_{B1} = -\frac{1}{\ell}$$

曲げモーメント

$$M_2 = V_{A2} x_1 = \frac{x_1}{\ell} \quad (0 \le x_1 \le a)$$

$$M_2 = X_2 + V_{B2} x_2 = \frac{\ell - x_2}{\ell} \quad (0 \le x_2 \le b)$$

このとき，

$$\delta_{10}=\int\frac{M_1M_0}{EI}dx=\int_0^a\frac{1}{EI}\left(\frac{\ell-x_1}{\ell}\right)\left(\frac{Pb}{\ell}x_1\right)dx_1+\int_0^b\frac{1}{EI}\left(\frac{x_2}{\ell}\right)\left(\frac{Pa}{\ell}x_2\right)dx_2=\frac{Pab(\ell+b)}{6EI\ell}$$

$$\delta_{20}=\int\frac{M_2M_0}{EI}dx=\int_0^a\frac{1}{EI}\left(\frac{x_1}{\ell}\right)\left(\frac{Pb}{\ell}x_1\right)dx_1+\int_0^b\frac{1}{EI}\left(\frac{\ell-x_2}{\ell}\right)\left(\frac{Pa}{\ell}x_2\right)dx_2=\frac{Pab(\ell+a)}{6EI\ell}$$

$$\delta_{11}=\int\frac{M_1M_1}{EI}dx=\int_0^a\frac{1}{EI}\left(\frac{\ell-x_1}{\ell}\right)^2dx_1+\int_0^b\frac{1}{EI}\left(\frac{x_2}{\ell}\right)^2dx_2=\frac{\ell}{3EI}$$

$$\delta_{22}=\int\frac{M_2M_2}{EI}dx=\int_0^a\frac{1}{EI}\left(\frac{x_1}{\ell}\right)^2dx_1+\int_0^b\frac{1}{EI}\left(\frac{\ell-x_2}{\ell}\right)^2dx_2=\frac{\ell}{3EI}$$

$$\delta_{12}=\delta_{21}=\int\frac{M_1M_2}{EI}dx=\int_0^a\frac{1}{EI}\left(\frac{\ell-x_1}{\ell}\right)\left(\frac{x_1}{\ell}\right)dx_1+\int_0^b\frac{1}{EI}\left(\frac{x_2}{\ell}\right)\left(\frac{\ell-x_2}{\ell}\right)dx_2=\frac{\ell}{6EI}$$

したがって，適合条件式（支点Ａ，Ｂのたわみ角）

$$\theta_A=\delta_1=\delta_{10}+\delta_{11}X_1+\delta_{12}X_2=0,\quad \theta_B=\delta_2=\delta_{20}+\delta_{21}X_1+\delta_{22}X_2=0$$

に代入し，余力 X_1， X_2 について解くと，

$$X_1=-\frac{Pab^2}{\ell^2}=M_A,\quad X_2=-\frac{Pa^2b}{\ell^2}=M_B$$

支点反力

$$V_A=V_{A0}+V_{A1}X_1+V_{A2}X_2=\frac{Pb^2(\ell+2a)}{\ell^3}$$

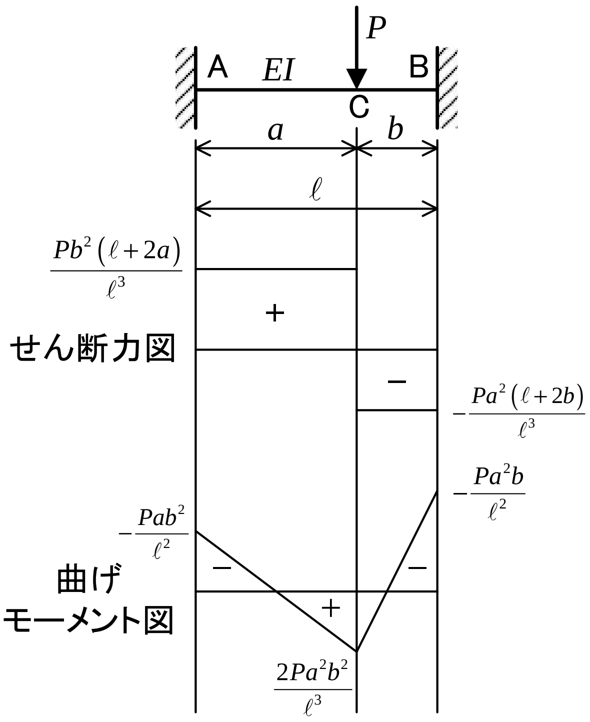
$$V_B=V_{B0}+V_{B1}X_1+V_{B2}X_2=\frac{Pa^2(\ell+2b)}{\ell^3}$$

（もちろん，$V_A+V_B=P$ → ＯＫ）

断面力

$$Q=Q_0+Q_1X_1+Q_2X_2,\quad M=M_0+M_1X_1+M_2X_2$$

断面力図



$$Q_A = V_A$$

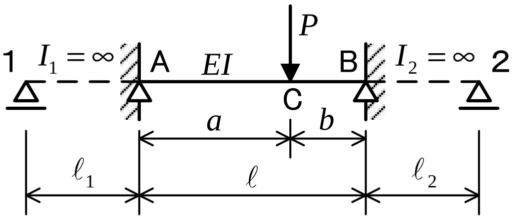
$$Q_C^- = Q_A\,,\quad Q_C^+ = Q_C^- - P$$

$$Q_B = Q_C^+$$

$$V_B = -Q_B \rightarrow \text{OK}$$

$$M_C = M_A + \frac{Pb^2(\ell+2a)}{\ell^3} \times a = \frac{2Pa^2b^2}{\ell^3}$$

参考（三連モーメント法）



三連モーメント式

(i)はり１－Ａ－Ｂ（支点Ａ）

$$\left(\frac{\ell_1}{I_1}\right)M_1+2\left(\frac{\ell_1}{I_1}+\frac{\ell}{I}\right)M_A+\left(\frac{\ell}{I}\right)M_B=6E\left(\theta_A^L-\theta_A^R\right)$$

ここで，$I_1=\infty$，$\theta_A^L=0$，$\theta_A^R=\dfrac{P\ell^2}{6EI}\left(\dfrac{b}{\ell}-\dfrac{b^3}{\ell^3}\right)$とおくと，

$$2M_A+M_B=-\frac{Pab\left(\ell+b\right)}{\ell^2} \qquad ①$$

(ii)はりＡ－Ｂ－２（支点Ｂ）

$$\left(\frac{\ell}{I}\right)M_A+2\left(\frac{\ell}{I}+\frac{\ell_2}{I_2}\right)M_B+\left(\frac{\ell_2}{I_2}\right)M_2=6E\left(\theta_B^L-\theta_B^R\right)$$

ここで，$I_2=\infty$，$\theta_B^L=-\dfrac{P\ell^2}{6EI}\left(\dfrac{a}{\ell}-\dfrac{a^3}{\ell^3}\right)$，$\theta_B^R=0$とおくと，

$$M_A+2M_B=-\frac{Pab\left(\ell+a\right)}{\ell^2} \qquad ②$$

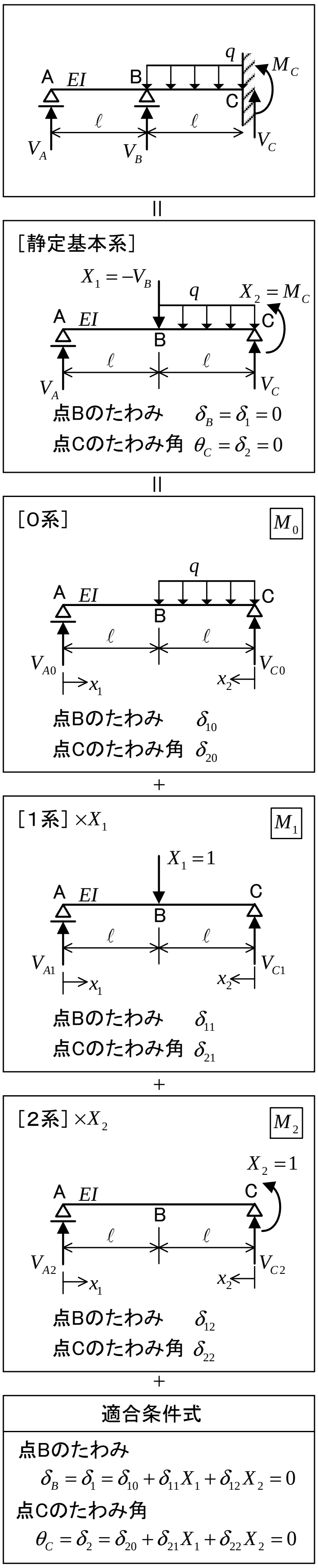
①と②を，M_A，M_Bについて解くと，

$$M_A=-\frac{Pab^2}{\ell^2},\quad M_B=-\frac{Pa^2b}{\ell^2}$$

支点反力

$$V_A=\frac{Pb}{\ell}-\frac{M_A}{\ell}+\frac{M_B}{\ell}=\frac{Pb^2\left(\ell+2a\right)}{\ell^3}$$

$$V_B=\frac{Pa}{\ell}+\frac{M_A}{\ell}-\frac{M_B}{\ell}=\frac{Pa^2\left(\ell+2b\right)}{\ell^3}$$



(2)

余力法

不静定次数

$r=5$, $h=0$ → $n=r-3-h=2$: 2次不静定

不静定力（余力） $X_1=-V_B$, $X_2=M_C$

静定基本系＝単純ばりＡＣ

適合条件式

支点Ｂのたわみ $\delta_B=\delta_1=0$

支点Ｃのたわみ角 $\theta_C=\delta_2=0$

［０系］静定基本系に元の荷重

支点反力

$$V_{A0}=\frac{q\ell}{4},\quad V_{C0}=\frac{3q\ell}{4}$$

曲げモーメント

$$M_0=V_{A0}x_1=\frac{q\ell}{4}x_1 \quad (0\le x_1\le\ell)$$

$$M_0=V_{C0}x_2-\frac{q}{2}x_2^2=\frac{3q\ell}{4}x_2-\frac{q}{2}x_2^2 \quad (0\le x_2\le\ell)$$

［１系］静定基本系に余力 X_1

支点反力

$$V_{A1}=V_{C1}=\frac{X_1}{2}=\frac{1}{2}$$

曲げモーメント

$$M_1=V_{A1}x_1=\frac{x_1}{2} \quad (0\le x_1\le\ell)$$

$$M_1=V_{C1}x_2=\frac{x_2}{2} \quad (0\le x_2\le\ell)$$

［２系］静定基本系に余力 X_2

支点反力

$$V_{A2}=\frac{X_2}{2\ell}=\frac{1}{2\ell},\quad R_{C2}=-\frac{1}{2\ell}$$

曲げモーメント

$$M_2=V_{A2}x_1=\frac{x_1}{2\ell} \quad (0\le x_1\le\ell)$$

$$M_2=X_2+V_{C2}x_2=\frac{2\ell-x_2}{2\ell} \quad (0\le x_2\le\ell)$$

このとき,

$$\delta_{10}=\int\frac{M_1M_0}{EI}dx=\int_0^\ell\frac{1}{EI}\left(\frac{x_1}{2}\right)\left(\frac{q\ell}{4}x_1\right)dx_1+\int_0^\ell\frac{1}{EI}\left(\frac{x_2}{2}\right)\left(\frac{3q\ell}{4}x_2-\frac{q}{2}x_2^2\right)dx_2=\frac{5q\ell^4}{48EI}$$

$$\delta_{20}=\int\frac{M_2M_0}{EI}dx=\int_0^{\ell}\frac{1}{EI}\left(\frac{x_1}{2\ell}\right)\left(\frac{q\ell}{4}x_1\right)dx_1+\int_0^{\ell}\frac{1}{EI}\left(\frac{2\ell-x_2}{2\ell}\right)\left(\frac{3q\ell}{4}x_2-\frac{q}{2}x_2^2\right)dx_2=\frac{3q\ell^3}{16EI}$$

$$\delta_{11}=\int\frac{M_1M_1}{EI}dx=\int_0^{\ell}\frac{1}{EI}\left(\frac{x_1}{2}\right)^2dx_1+\int_0^{\ell}\frac{1}{EI}\left(\frac{x_2}{2}\right)^2dx_2=\frac{\ell^3}{6EI}$$

$$\delta_{22}=\int\frac{M_2M_2}{EI}dx=\int_0^{\ell}\frac{1}{EI}\left(\frac{x_1}{2\ell}\right)^2dx_1+\int_0^{\ell}\frac{1}{EI}\left(\frac{2\ell-x_2}{2\ell}\right)^2dx_2=\frac{2\ell}{3EI}$$

$$\delta_{12}=\delta_{21}=\int\frac{M_1M_2}{EI}dx=\int_0^{\ell}\frac{1}{EI}\left(\frac{x_1}{2}\right)\left(\frac{x_1}{2\ell}\right)dx_1+\int_0^{\ell}\frac{1}{EI}\left(\frac{x_2}{2}\right)\left(\frac{2\ell-x_2}{2\ell}\right)dx_2=\frac{\ell^2}{4EI}$$

したがって，適合条件式（支点Ｂのたわみ，支点Ｃのたわみ角）

$$\delta_B=\delta_1=\delta_{10}+\delta_{11}X_1+\delta_{12}X_2=0,\quad \theta_C=\delta_2=\delta_{20}+\delta_{21}X_1+\delta_{22}X_2=0$$

に代入し，余力 X_1，X_2 について解くと，

$$X_1=-\frac{13}{28}q\ell,\quad X_2=-\frac{3}{28}q\ell^2\ \rightarrow\ V_B=-X_1=\frac{13}{28}q\ell,\quad M_C=X_2=-\frac{3}{28}q\ell^2$$

支点反力

$$V_A=V_{A0}+V_{A1}X_1+V_{A2}X_2=-\frac{q\ell}{28}$$

$$V_B=\frac{13}{28}q\ell$$

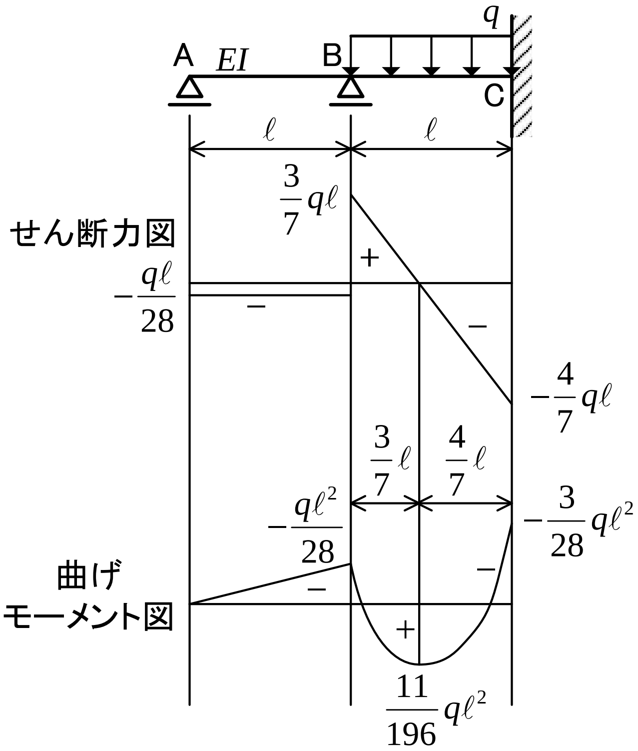
$$V_C=V_{C0}+V_{C1}X_1+V_{C2}X_2=\frac{4}{7}q\ell$$

（もちろん，$V_A+V_B+V_C=q\ell$ → ＯＫ）

断面力

$$Q=Q_0+Q_1X_1+Q_2X_2,\quad M=M_0+M_1X_1+M_2X_2$$

断面力図



$$Q_A = V_A = -\frac{q\ell}{28}$$

$$Q_B^- = Q_A = -\frac{q\ell}{28},\quad Q_B^+ = Q_B^- + V_B = \frac{3}{7}q\ell$$

$$Q_C = Q_B^- - q\ell = -\frac{4}{7}q\ell = -V_C \ \rightarrow\ \text{OK}$$

$$M_A = 0$$

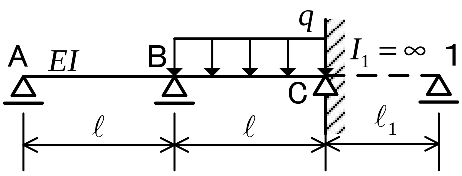
$$M_D = M_A + \left(-\frac{q\ell}{28}\right)\times\ell = -\frac{q\ell^2}{28}$$

$$M_{\max} = M_B + \frac{1}{2}\left(\frac{3}{7}q\ell\right)\times\frac{3}{7}\ell = \frac{11}{196}q\ell^2$$

$$M_C = M_{\max} + \frac{1}{2}\left(-\frac{4}{7}q\ell\right)\times\frac{4}{7}\ell = -\frac{3}{28}q\ell^2$$

→ＯＫ

参考１（三連モーメント法）



三連モーメント式

(i)はりＡ－Ｂ－Ｃ（支点Ｂ）

$$\left(\frac{\ell}{I}\right)M_A+2\left(\frac{\ell}{I}+\frac{\ell}{I}\right)M_B+\left(\frac{\ell}{I}\right)M_C=6E\left(\theta_B^L-\theta_B^R\right)$$

ここで，$M_A=0$，$\theta_B^L=0$，$\theta_B^R=\dfrac{q\ell^3}{24EI}$とおくと，

$$4M_B+M_C=-\frac{q\ell^2}{4} \qquad ①$$

(ii)はりＢ－Ｃ－１（支点Ｃ）

$$\left(\frac{\ell}{I}\right)M_B+2\left(\frac{\ell}{I}+\frac{\ell_1}{I_1}\right)M_C+\left(\frac{\ell_1}{I_1}\right)M_1=6E\left(\theta_C^L-\theta_C^R\right)$$

ここで，$I_1=\infty$，$\theta_C^L=-\dfrac{q\ell^3}{24EI}$，$\theta_C^R=0$とおくと，

$$M_B+2M_C=-\frac{q\ell^2}{4} \qquad ②$$

①と②を，M_B，M_Cについて解くと，

$$M_B=-\frac{q\ell^2}{28},\quad M_C=-\frac{3q\ell^2}{28}$$

支点反力

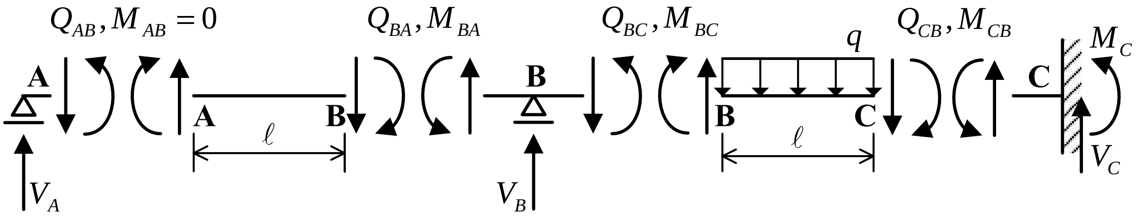
$$V_A=\frac{M_B}{\ell}=-\frac{q\ell}{28}$$

$$V_B=-\frac{M_B}{\ell}+\frac{q\ell}{2}-\frac{M_B}{\ell}+\frac{M_C}{\ell}=\frac{13}{28}q\ell$$

$$V_C=\frac{q\ell}{2}+\frac{M_B}{\ell}-\frac{M_C}{\ell}=\frac{4}{7}q\ell$$

（もちろん，$V_A+V_B+V_C=q\ell$ → ＯＫ）

参考２（たわみ角法）



基準剛度 $K_0=\dfrac{I}{\ell}$

剛比　$k_{AB}=k_{BC}=1$

部材回転角はすべて生じない

たわみ角式

(i)部材ＡＢ（左端ヒンジ）

$$M_{AB}=0,\quad M_{BA}=1\left(\frac{3}{2}\varphi_B\right)=\frac{3}{2}\varphi_B$$

(ii)部材ＢＣ（支点Ｃ固定：$\varphi_C=0$）

$$M_{BC}=1(2\varphi_B)+C_{BC}=2\varphi_B-\frac{q\ell^2}{12}$$

$$M_{CB}=1(\varphi_B)+C_{CB}=\varphi_B+\frac{q\ell^2}{12}$$

節点方程式（節点Ｂ）

$$M_{BA}+M_{BC}=0\ \rightarrow\ \varphi_B=\frac{q\ell^2}{42}$$

材端曲げモーメント

(i)部材ＡＢ

$$M_{AB}=0,\quad M_{BA}=\frac{q\ell^2}{28}$$

(ii)部材ＢＣ

$$M_{BC}=-\frac{q\ell^2}{28},\quad M_{CB}=\frac{3}{28}q\ell^2$$

材端せん断力

(i)部材ＡＢ

$$\sum M_{(\mathrm{A})} = 0 \;:\; M_{BA} + Q_{BA}\ell = 0 \;\rightarrow\; Q_{BA} = -\frac{M_{BA}}{\ell} = -\frac{q\ell}{28}$$

$$\sum V = 0 \;:\; Q_{AB} - Q_{BA} = 0 \;\rightarrow\; Q_{AB} = Q_{BA} = -\frac{q\ell}{28}$$

(ii)部材ＢＣ

$$\sum M_{(\mathrm{B})} = 0 \;:\; M_{BC} + M_{CB} + Q_{CB}\ell + \frac{q\ell^2}{2} = 0 \;\rightarrow\; Q_{CB} = -\frac{M_{BC} + M_{CB}}{\ell} - \frac{q\ell}{2} = -\frac{4}{7}q\ell$$

$$\sum V = 0 \;:\; Q_{BC} - q\ell - Q_{CB} = 0 \;\rightarrow\; Q_{BC} = q\ell + Q_{CB} = \frac{3}{7}q\ell$$

支点反力

(i)支点Ａ

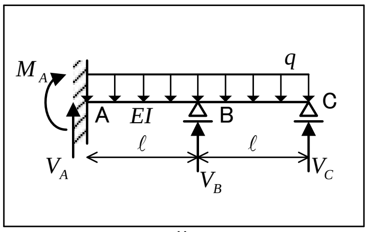
$$V_A = Q_{AB} = -\frac{q\ell}{28}$$

(ii)支点Ｂ

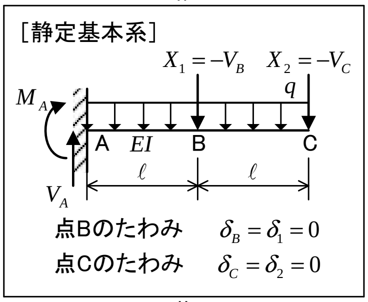
$$V_B = Q_{BC} - Q_{BA} = \frac{13}{28}q\ell$$

(iii)支点Ｃ

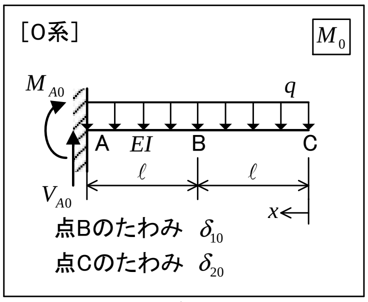
$$V_C = -Q_{CB} = \frac{4}{7}q\ell$$



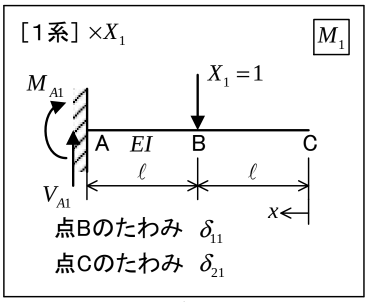
=



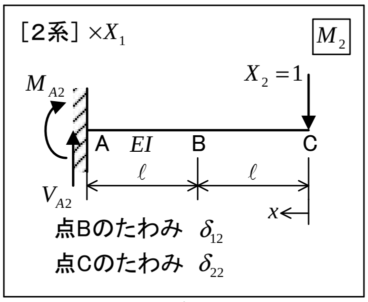
=



+



+



+

適合条件式

点Bのたわみ

$\delta_B=\delta_1=\delta_{10}+\delta_{11}X_1+\delta_{12}X_2=0$

点Cのたわみ

$\delta_C=\delta_2=\delta_{20}+\delta_{21}X_1+\delta_{22}X_2=0$

(3)（１３－４節たわみ角法の例題 13-6 と同じ）

余力法

不静定次数

$r=5$，$h=0$ → $n=r-3-h=2$ ：２次不静定

不静定力（余力）$X_1=-V_B$，$X_2=-V_C$

静定基本系＝片持ちばりＡＣ

適合条件式

支点Ｂのたわみ $\delta_B=\delta_1=0$

支点Ｃのたわみ $\delta_C=\delta_2=0$

［０系］静定基本系に元の荷重

支点反力

$V_{A0}=2q\ell$，$M_{A0}=-2q\ell^2$

曲げモーメント

$M_0=-\dfrac{q}{2}x^2$　（$0\le x\le 2\ell$）

［１系］静定基本系に余力 X_1

支点反力

$V_{A1}=1$，$M_{A1}=-\ell$

曲げモーメント

$M_1=0$　（$0\le x\le \ell$）

$M_1=\ell-x$　（$\ell\le x\le 2\ell$）

［２系］静定基本系に余力 X_2

支点反力

$V_{A2}=1$，$M_{A2}=-2\ell$

曲げモーメント

$M_2=-x$　（$0\le x\le 2\ell$）

このとき，

$$\delta_{10}=\int\frac{M_1M_0}{EI}dx=\int_{\ell}^{2\ell}\frac{1}{EI}(\ell-x)\left(-\frac{q}{2}x^2\right)dx=\frac{17q\ell^4}{24EI}$$

$$\delta_{20}=\int\frac{M_2M_0}{EI}dx=\int_{0}^{2\ell}\frac{1}{EI}(-x)\left(-\frac{q}{2}x^2\right)dx=\frac{2q\ell^4}{EI}$$

$$\delta_{11}=\int\frac{M_1M_1}{EI}dx=\int_{\ell}^{2\ell}\frac{1}{EI}(\ell-x)^2dx=\frac{\ell^3}{3EI}$$

$$\delta_{22}=\int\frac{M_2M_2}{EI}dx=\int_{0}^{2\ell}\frac{1}{EI}(-x)^2dx=\frac{8\ell^3}{3EI}$$

$$\delta_{12}=\delta_{21}=\int\frac{M_1M_2}{EI}dx=\int_{\ell}^{2\ell}\frac{1}{EI}(\ell-x)(-x)dx=\frac{5\ell^3}{6EI}$$

したがって，適合条件式（支点Ｂ，Ｃのたわみ）

$$\delta_B=\delta_1=\delta_{10}+\delta_{11}X_1+\delta_{12}X_2=0,\quad \delta_C=\delta_2=\delta_{20}+\delta_{21}X_1+\delta_{22}X_2=0$$

に代入し，余力 X_1， X_2 について解くと，

$$X_1=-\frac{8}{7}q\ell,\quad X_2=-\frac{11}{28}q\ell \ \rightarrow\ V_B=-X_1=\frac{8}{7}q\ell,\quad V_C=-X_2=\frac{11}{28}q\ell$$

支点反力

$$V_A=V_{A0}+V_{A1}X_1+V_{A2}X_2=\frac{13}{28}q\ell$$

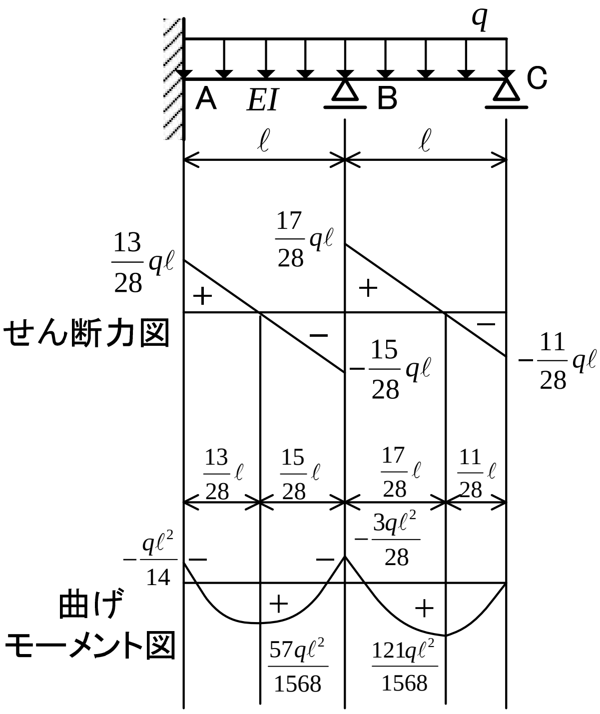
（もちろん，$V_A+V_B+V_C=2q\ell$ → ＯＫ）

$$M_A=M_{A0}+M_{A1}X_1+M_{A2}X_2=-\frac{q\ell^2}{14}$$

断面力

$$Q=Q_0+Q_1X_1+Q_2X_2,\quad M=M_0+M_1X_1+M_2X_2$$

断面力図



$$Q_A = V_A = \frac{13}{28} q\ell$$

$$Q_B^- = Q_A - q\ell = -\frac{15}{28} q\ell$$,

$$Q_B^+ = Q_B^- + V_B = \frac{17}{28} q\ell$$

$$Q_C = Q_B^- - q\ell = -\frac{11}{28} q\ell = -V_C \quad \rightarrow \quad \text{OK}$$

$$M_A = -\frac{q\ell^2}{14}$$

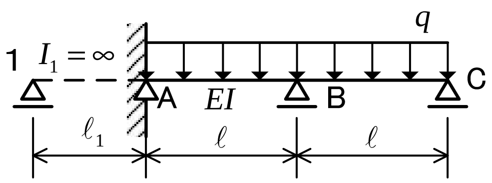
$$M_{\max 1} = M_A + \frac{1}{2}\left(\frac{13}{28} q\ell\right) \times \frac{13}{28} \ell = \frac{57}{1568} q\ell^2$$

$$M_{\mathrm{B}} = M_{\max 1} + \frac{1}{2}\left(-\frac{15}{28} q\ell\right) \times \frac{15}{28} \ell = -\frac{3}{28} q\ell^2$$

$$M_{\max 2} = M_B + \frac{1}{2}\left(\frac{17}{28} q\ell\right) \times \frac{17}{28} \ell = \frac{121}{1568} q\ell^2$$

$$M_C = M_{\max 2} + \frac{1}{2}\left(-\frac{11}{28} q\ell\right) \times \frac{11}{28} \ell = 0 \quad \rightarrow \quad \text{OK}$$

参考（三連モーメント法）



三連モーメント式

(i)はり１－Ａ－Ｂ（支点Ａ）

$$\left(\frac{\ell_1}{I_1}\right)M_1+2\left(\frac{\ell_1}{I_1}+\frac{\ell}{I}\right)M_A+\left(\frac{\ell}{I}\right)M_B=6E\left(\theta_A^L-\theta_A^R\right)$$

ここで，$I_1=\infty$，$\theta_A^L=0$，$\theta_A^R=\dfrac{q\ell^3}{24EI}$ とおくと，

$$2M_A+M_B=-\frac{q\ell^2}{4} \qquad ①$$

(ii)はりＡ－Ｂ－Ｃ（支点Ｂ）

$$\left(\frac{\ell}{I}\right)M_A+2\left(\frac{\ell}{I}+\frac{\ell}{I}\right)M_B+\left(\frac{\ell}{I}\right)M_C=6E\left(\theta_B^L-\theta_B^R\right)$$

ここで，$M_C=0$，$\theta_B^L=-\dfrac{q\ell^3}{24EI}$，$\theta_B^R=\dfrac{q\ell^3}{24EI}$ とおくと，

$$M_A+4M_B=-\frac{q\ell^2}{2} \qquad ②$$

①と②を，M_A，M_B について解くと，

$$M_A=-\frac{q\ell^2}{14},\quad M_B=-\frac{3}{28}q\ell^2$$

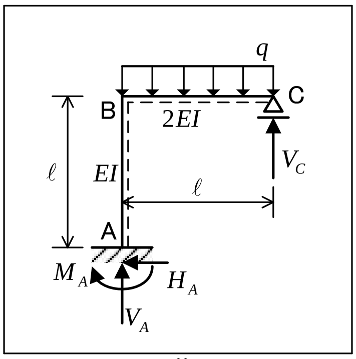
支点反力

$$V_A=\frac{q\ell}{2}-\frac{M_A}{\ell}+\frac{M_B}{\ell}=\frac{13}{28}q\ell$$

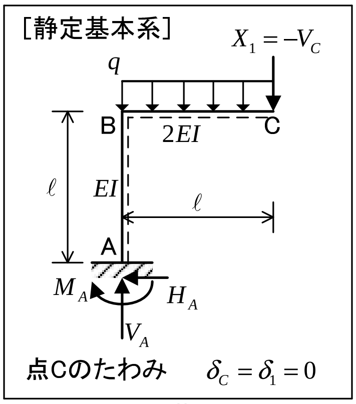
$$V_B=\left(\frac{q\ell}{2}+\frac{M_A}{\ell}-\frac{M_B}{\ell}\right)+\left(\frac{q\ell}{2}+\frac{M_B}{\ell}\right)=\frac{8}{7}q\ell$$

$$V_C=\frac{q\ell}{2}+\frac{M_B}{\ell}=\frac{11}{28}q\ell$$

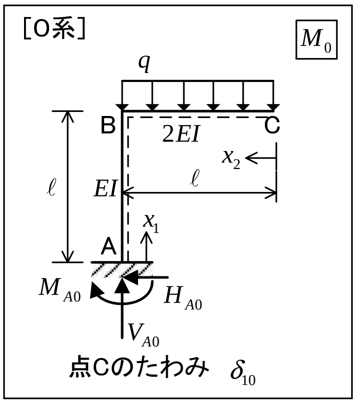
（もちろん，$V_A+V_B+V_C=2q\ell$ → ＯＫ）



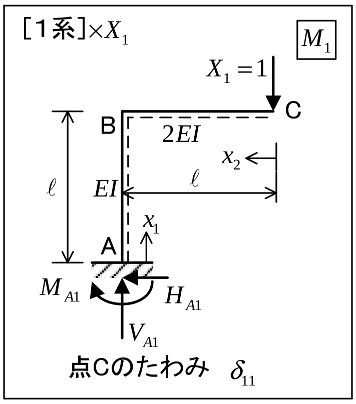
=



=



+



+

適合条件式
点Cのたわみ $\delta_C=\delta_1=\delta_{10}+\delta_{11}X_1=0$

(4)（１３－４節たわみ角法の例題１３－８に同じ）

余力法

不静定次数

$r=4$，$h=0$ → $n=r-3-h=1$ ：１次不静定

不静定力（余力）$X_1=-V_C$

静定基本系＝片持ラーメン（片持ちばり）ＡＢＣ

適合条件式

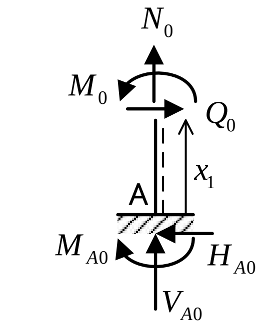
支点Ｃのたわみ $\delta_C=\delta_1=0$

［０系］静定基本系に元の荷重

支点反力

$$H_{A0}=0,\quad V_{A0}=q\ell,\quad M_{A0}=-\frac{q\ell^2}{2}$$

断面力

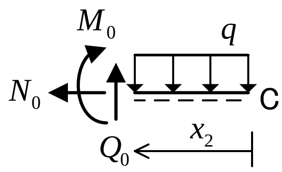


(i)柱ＡＢ（$0\le x_1\le \ell$）

$$N_0=-V_{A0}=-q\ell,\quad Q_0=H_{A0}=0,$$

$$M_0=M_{A0}+H_{A0}x_1=-\frac{q\ell^2}{2}$$

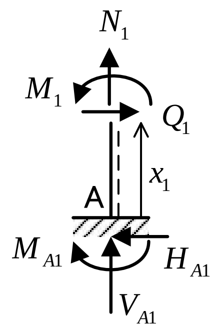
(ii)はりＣＢ（$0\le x_2\le \ell$）



$$N_0=0,\quad Q_0=qx_2,$$

$$M_0=-\frac{q}{2}x_2^2$$

［１系］静定基本系に余力 X_1



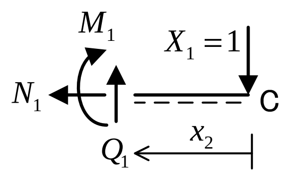
支点反力

$$H_{A1}=0,\quad V_{A1}=X_1=1,$$

$$M_{A1}=-X_1\ell=-\ell$$

断面力

(i)柱ＡＢ（$0\le x_1\le \ell$）



$$N_1=-V_{A1}=-1,\quad Q_1=H_{A1}=0,$$

$$M_1=M_{A1}+H_{A1}x_1=-\ell$$

(ii)はりＣＢ（$0 \le x_2 \le \ell$）

$$N_1 = 0,\quad Q_0 = X_1 = 1,\quad M_1 = -X_1 x_2 = -x_2$$

このとき，

$$\delta_{10} = \int \frac{M_1 M_0}{EI} dx = \int_\ell^\ell \frac{1}{EI}(-\ell)\left(-\frac{q\ell^2}{2}\right)dx_1 + \int_0^\ell \frac{1}{2EI}(-x_2)\left(-\frac{q}{2}x_2^2\right)dx_2 = \frac{9q\ell^4}{16EI}$$

$$\delta_{11} = \int \frac{M_1 M_1}{EI} dx = \int_\ell^\ell \frac{1}{EI}(-\ell)^2 dx_1 + \int_0^\ell \frac{1}{2EI}(-x_2)^2 dx_2 = \frac{7\ell^3}{6EI}$$

したがって，適合条件式（支点Ｃのたわみ）

$$\delta_C = \delta_1 = \delta_{10} + \delta_{11} X_1 = 0$$

に代入し，余力 X_1 について解くと，

$$X_1 = -\frac{27}{56}q\ell \;\rightarrow\; V_C = -X_1 = \frac{27}{56}q\ell$$

支点反力

$$H_A = H_{A0} + H_{A1} X_1 = 0$$

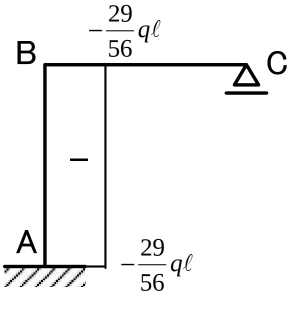
$$V_A = V_{A0} + V_{A1} X_1 = \frac{29}{56}q\ell$$

$$M_A = M_{A0} + M_{A1} X_1 = -\frac{q\ell^2}{56}$$

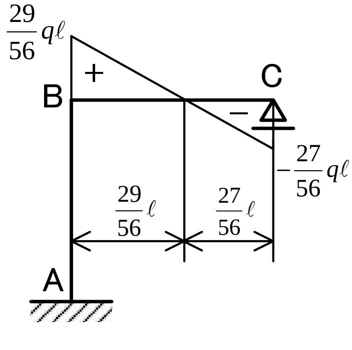
断面力

$$N = N_0 + N_1 X_1,\quad Q = Q_0 + Q_1 X_1 \; M = M_0 + M_1 X_1$$

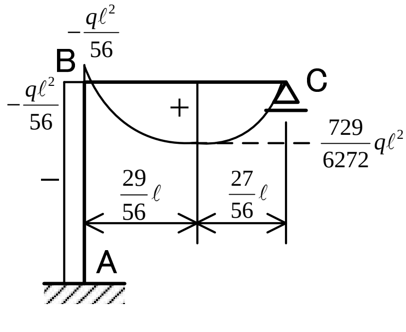
断面力図



軸力図

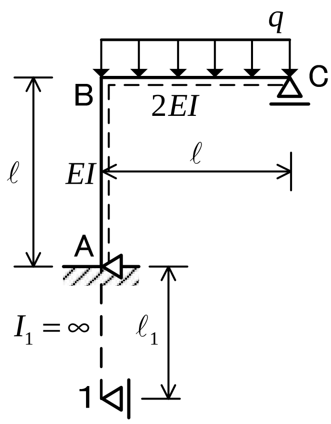


せん断力図



曲げモーメント図

参考（三連モーメント法）



部材回転角

$R_{AB}=R$， $R_{BC}=0$

三連モーメント式

(i)はり１－Ａ－Ｂ（支点Ａ）

$$\left(\frac{\ell_1}{I_1}\right)M_1+2\left(\frac{\ell_1}{I_1}+\frac{\ell}{I}\right)M_A+\left(\frac{\ell}{I}\right)M_B=6E\left(R_A^L-R_A^R\right)$$

ここで， $I_1=\infty$， $R_A^L=0$， $R_A^R=R_{AB}=R$ とすると，

$$2M_A+M_B=\psi \qquad ①$$

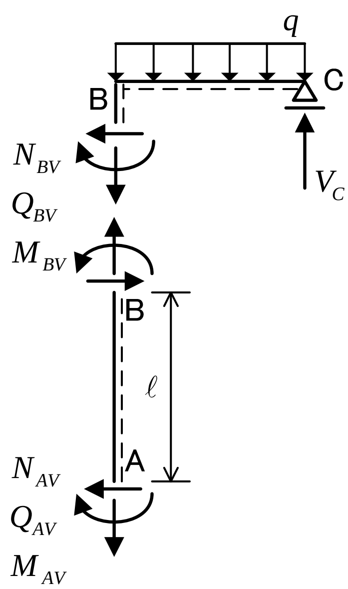
ここに， $\psi=-\dfrac{6EI}{\ell}R$

(ii)Ａ－Ｂ－Ｃ（節点Ｂ）

$$\left(\frac{\ell}{I}\right)M_A+2\left(\frac{\ell}{I}+\frac{\ell}{2I}\right)M_B+\left(\frac{\ell}{2I}\right)M_C=6E\left(\theta_B^L-\theta_B^R\right)+6E\left(R_B^L-R_B^R\right)$$

ここで， $M_C=0$， $\theta_B^L=0$， $\theta_B^R=\dfrac{q\ell^3}{24(2EI)}$ とおくと，

$$M_A+3M_B=-\frac{q\ell^2}{8}-\psi \qquad ②$$



層方程式

（節点Ｂ直下で部材ＡＢを切断）

$\sum V=0$ ： $Q_{BV}=0$

部材ＡＢで

$\sum_A M=0$ ： $M_{AV}-M_{BV}+Q_{BV}\ell=0$

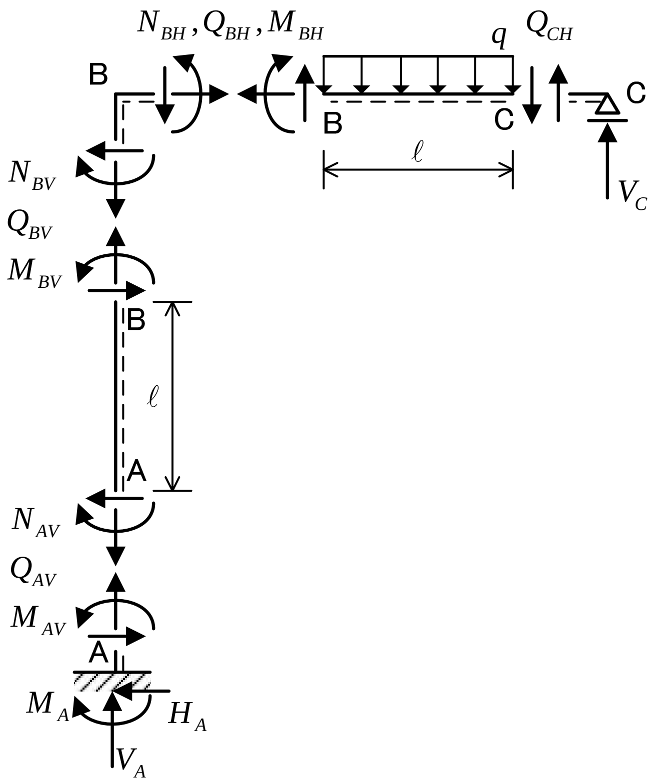
$\rightarrow \quad Q_{BV}=\dfrac{M_{BV}-M_{AV}}{\ell}$

よって， $M_{AV}=M_{BV} \quad \rightarrow \quad M_A=M_B \qquad ③$

①～③より，

$$M_A = M_B = -\frac{q\ell^2}{56}, \quad \psi = -\frac{3}{56}q\ell^2 \quad \rightarrow \quad R = \frac{q\ell^3}{112EI}$$

たわみ角法と同様に，断面力と支点反力を求める（曲げモーメントの正の向きに注意！）。



断面力

$$M_{AV} = M_A = -\frac{q\ell^2}{56}, \quad M_{BV} = M_{BH} = M_B = -\frac{q\ell^2}{56}$$

（ｉ）部材ＡＢ

$\sum H = 0$ ： $Q_{AV} = Q_{BV} = 0$ （層方程式より）

$\sum V = 0$ ： $N_{AV} = N_{BV} = -\frac{29}{56}P$ （←下記（iii））

(ii)節点Ｂ

$$\sum M_{(B)} = 0 \; : \; M_{BV} - M_{BH} = 0 \quad \rightarrow \quad M_{BV} = M_{BH} = M_B = -\frac{q\ell^2}{56}$$

$\sum H = 0$ ： $N_{BH} = Q_{BV} = 0$

$$\sum V = 0 \ : \ N_{BV} = -Q_{BH} = -\frac{29}{56} q\ell$$ （←下記(iii)）

(iii)部材ＢＣ

$$\sum M_{(C)} = 0 \ : \ M_{BH} - M_{CH} + Q_{BH}\ell - \frac{q\ell^2}{2} = 0 \quad \rightarrow \quad Q_{BH} = \frac{q\ell}{2} + \frac{M_{CH} - M_{BH}}{\ell} = \frac{29}{56} q\ell$$

$$\sum H = 0 \ : \ N_{BH} = 0$$

$$\sum V = 0 \ : \ Q_{CH} = Q_{BH} - q\ell = -\frac{27}{56} q\ell$$

支点反力

(i)支点Ａ

$$H_A = Q_{AV} = 0, \quad V_A = -N_{AV} = \frac{29}{56} q\ell, \quad M_A = -\frac{q\ell^2}{56}$$

(ii)支点Ｃ

$$V_C = -Q_{CH} = \frac{27}{56} q\ell$$