$\boxed{\text{演習問題A}}$

8-A1

(1)フックの法則より，

$$\sigma = \frac{P}{A} = E\frac{\Delta l}{l} \quad \rightarrow \quad E = \frac{Pl}{A\Delta l} = \frac{44\times10^{3}\times1.4}{4\times10^{-4}\times0.872\times10^{-3}} = 1.766\times10^{11} = 176.6\,\mathrm{GPa}$$

(2)

軸方向（縦方向）の伸び（＋）：$\Delta l = -1\times10^{-3}\,\mathrm{m}$

横方向の伸び（伸び＋）：$\Delta d = 0.3\times10^{-3}\,\mathrm{m}$

縦ひずみ（引張＋）：$\varepsilon_T = \dfrac{\Delta d}{d} = \dfrac{0.3\times10^{-3}}{20\times10^{-2}} = 1.5\times10^{-3}$

横ひずみ（引張＋）：$\varepsilon_L = \dfrac{\Delta l}{l} = \dfrac{-1\times10^{-2}}{2} = -5\times10^{-3}$

ポアソン比 $\nu = -\dfrac{\varepsilon_T}{\varepsilon_L} = \dfrac{1.5\times10^{-3}}{5\times10^{-3}} = 0.3$

(3)

断面積 $A = \dfrac{\pi}{4}d^{2}$

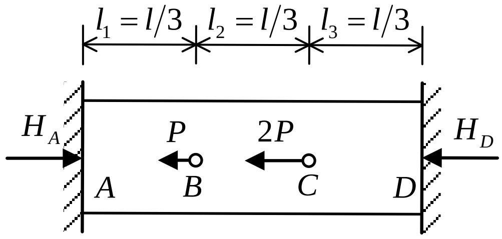
鋼棒に生じる引張応力が許容応力以下であればいいので，

$$\sigma = \frac{P}{A} = \frac{4P}{\pi d^{2}} \le \sigma_A \quad \rightarrow \quad d^{2} \ge \frac{4P}{\pi\sigma_A}$$

$$\rightarrow d \ge \sqrt{\frac{4P}{\pi\sigma_A}} = \sqrt{\frac{4\times70\times10^{3}}{\pi\times12.5\times10^{3}\times10^{4}}} = 0.0267\,\mathrm{m} = 2.67\,\mathrm{cm}$$

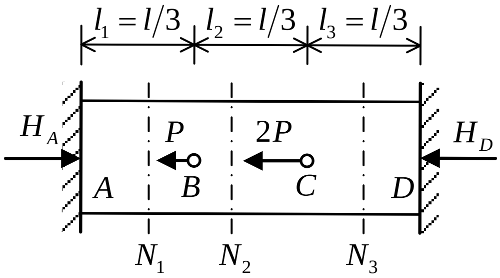
8-A2

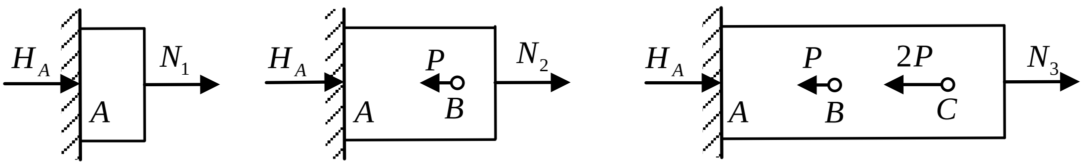
(1)



棒材全体の力のつり合い

$$\sum H = 0 \ : \ H_A - P - 2P - H_D = 0 \quad \rightarrow \quad H_A = H_D + 3P \quad \cdots\cdots ①$$





棒材 AD を 3 区間 AB，BC，CD に生じる軸力 N_1， N_2， N_3 は，各区間で切断したときの力のつり合いより

$$N_1 = -H_A \qquad N_2 = P - H_A \qquad N_3 = 3P - H_A$$

3 区間の伸びを Δl_1， Δl_2， Δl_3 とすると，各区間でフックの法則が成り立つので

区間 AB： $\Delta l_1 = \dfrac{N_1 l_1}{EA} = \dfrac{-H_A l_1}{EA} = \dfrac{-H_A l}{3EA}$

区間 BC： $\Delta l_2 = \dfrac{N_2 l_2}{EA} = \dfrac{(P - H_A) l_2}{EA} = \dfrac{(P - H_A) l}{3EA}$

区間 CD： $\Delta l_3 = \dfrac{N_3 l_3}{EA} = \dfrac{(3P - H_A) l_3}{EA} = \dfrac{(3P - H_A) l}{3EA}$

変形の適合条件

両端 A，D で固定されているので，棒材全体の長さは変化しない（全体の伸びはゼロ）

$$\Delta l = \Delta l_1 + \Delta l_2 + \Delta l_3 = 0$$

各区間の伸びをこの式に代入し，整理すると

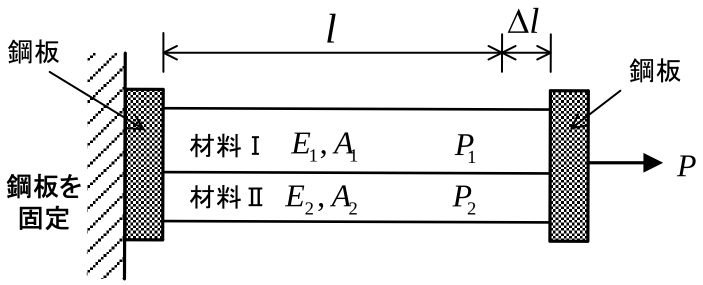
$$\Delta l = \frac{-H_A l}{3EA} + \frac{(P - H_A)l}{3EA} + \frac{(3P - H_A)l}{3EA} = 0$$

$$4P - 3H_A = 0 \quad \rightarrow \quad H_A = \frac{4}{3}P \quad \cdots\cdots\cdots②$$

②→①から

$$H_D = H_A - 3P = -\frac{5}{3}P$$

(2)



材料部材Ⅰ，材料部材Ⅱの分担荷重を P_1， P_2 とすると

$P = P_1 + P_2$ ………①

全体の伸びは材料部材Ⅰ，Ⅱともすべて同じ Δl（ひずみが同じ）なので，それぞれの部材の伸びを Δl_1， Δl_2 とすると

$\Delta l = \Delta l_1 = \Delta l_2$

各材料部材ではフックの法則が成り立つので

$P_1 = \dfrac{E_1 A_1}{l} = \dfrac{E_1 A_1}{l}\Delta l$， $P_2 = \dfrac{E_2 A_2}{l}\Delta l_2 = \dfrac{E_2 A_2}{l}\Delta l$ ………②

②→①から，この合成部材の全体の引張力 P と全体の伸び Δl の関係は

$P = P_1 + P_2 = \dfrac{E_1 A_1}{l}\Delta l + \dfrac{E_2 A_2}{l}\Delta l = \left(E_1 A_1 + E_2 A_2\right)\left(\dfrac{\Delta l}{l}\right)$ ………③

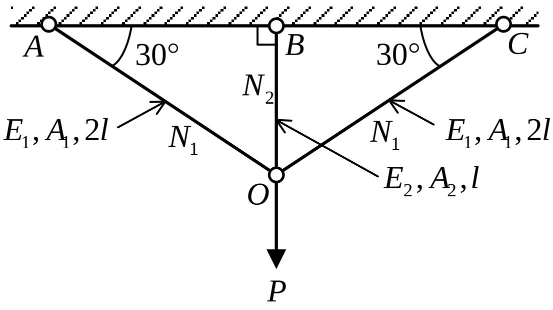
これより，全体の伸び Δl あるいは全体のひずみは

$\Delta l = \dfrac{Pl}{E_1 A_1 + E_2 A_2}$， $\dfrac{\Delta l}{l} = \dfrac{P}{E_1 A_1 + E_2 A_2}$ ………④

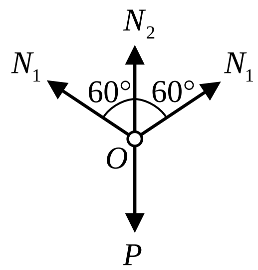
したがって，④→②から，分担荷重は

$P_1 = \left(\dfrac{E_1 A_1}{E_1 A_1 + E_2 A_2}\right)P$， $P_2 = \left(\dfrac{E_2 A_2}{E_1 A_1 + E_2 A_2}\right)P$

(3)



ワイヤーに生じる軸力を構造物の対称性を考えて，図のように N_1 と N_2 とする。

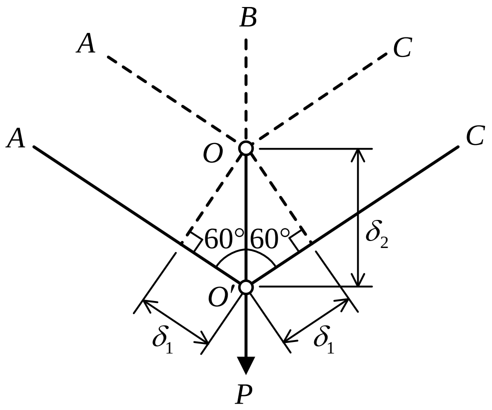


点 O での力のつり合いから

$\sum H = 0$ ：明らかに成り立つ

$\sum V = 0$ ： $2N_1 \cos 60° + N_2 - P = 0$

$$\rightarrow \quad N_1 + N_2 - P = 0 \quad \cdots\cdots ①$$



点 O を荷重 P で鉛直下向きに引張ると，対称条件から図のように点 O は鉛直下方の点 O' になったとする。このとき，ワイヤーの伸びを δ_1， δ_2 とおく。ただし，この伸びはワイヤーの長さに比べ微小とし， $OA//O'A$， $OC//O'C$ と考える。３本のワイヤーの伸びに関する点 O における変形の条件（適合条件）は

$$\delta_1 = \delta_2 \cos 60° \quad \rightarrow \quad \delta_1 = \delta_2 \cos 60° = \frac{\delta_2}{2} \quad \cdots\cdots ②$$

さて，３本のワイヤーではそれぞれフックの法則が成り立つので，伸び δ_1， δ_2 は，

$$\delta_1 = \frac{N_1(2l)}{E_1 A_1} = \frac{2N_1 l}{E_1 A_1}, \quad \delta_2 = \frac{N_2 l}{E_2 A_2} \quad \cdots\cdots ③$$

③ → ②から

$$\delta_1 = \frac{2N_1 l}{E_1 A_1} = \frac{\delta_2}{2} = \frac{N_2 l}{2E_2 A_2} \quad \rightarrow \quad N_1 = \frac{E_1 A_1}{4E_2 A_2} N_2 \quad \cdots\cdots ④$$

④ → ①から

$$N_2 = \left(\frac{4E_2 A_2}{E_1 A_1 + 4E_2 A_2} \right) P$$

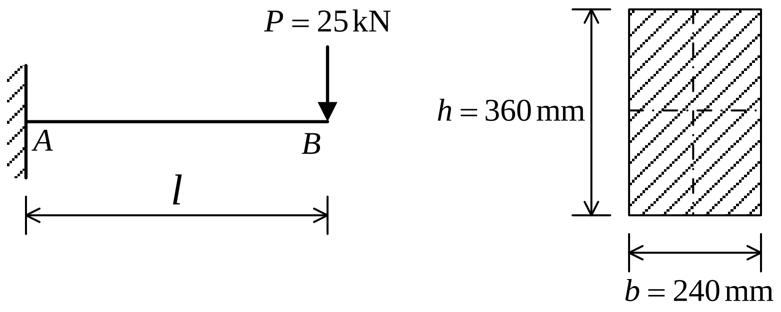
これを④に代入して

$$N_1 = \left(\frac{E_1 A_1}{E_1 A_1 + 4E_2 A_2} \right) P$$

また，このときの伸びは

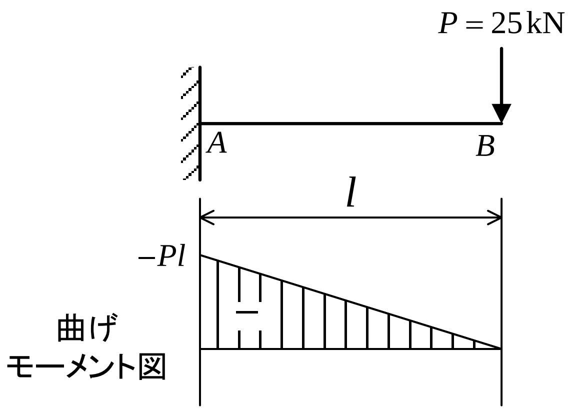
$$\delta_1 = \frac{2Pl}{E_1 A_1 + 4E_2 A_2}, \quad \delta_2 = \frac{4Pl}{E_1 A_1 + 4E_2 A_2}$$

8-A3



曲げモーメント図から，片持ちばりに生じる最大曲げモーメントは固定端 A で

$$M_{\max} = \left| -Pl \right| = Pl$$



断面 2 次モーメント

$$I_z = \frac{240 \times 360^3}{12} = 9.331 \times 10^8\ \mathrm{mm}^4$$

最大曲げ応力（固定端 A，縁端）が下記の条件を満足すればいいので

$$\sigma_{\max} = \frac{M_{\max}}{I_z}\left(\frac{h}{2}\right) \le \sigma_a \quad \rightarrow \quad \frac{Plh}{2I_z} \le \sigma_a$$

よって

$$l \le \frac{2\sigma_a I_z}{Ph} = \frac{2 \times 15 \times 9.331 \times 10^8}{25 \times 10^3 \times 360} = 3110\,\mathrm{mm}$$

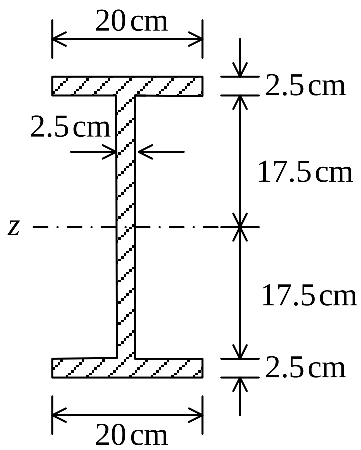
演習問題B

8-B1

曲げモーメント $M = 40\,\mathrm{kNm} = 40\times10^3\times10^2\ \mathrm{Ncm}$

せん断力 $Q = 38\,\mathrm{kN} = 38\times10^3\ \mathrm{N}$

中立軸 z に関する断面２次モーメント



$$I_z = \frac{20\times40^3}{12} - \frac{2.5\times35^3}{12} = 9.773\times10^4\ \mathrm{cm}^4$$

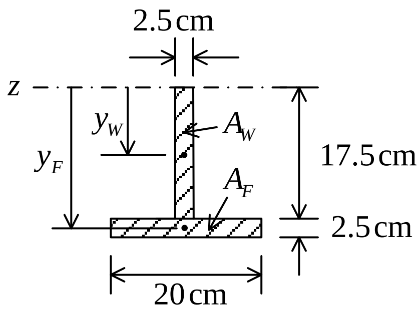
最大曲げ応力（最縁端）（全高 $H = 40\,\mathrm{cm}$）

$$\sigma_{\max} = \frac{M}{I_z}\left(\frac{H}{2}\right) = \frac{40\times10^3\times10^2}{9.773\times10^4}\times20 = 818.6\,\mathrm{N/cm}^2$$

せん断応力（中立軸 z で $b = 2.5\,\mathrm{cm}$）

$$\tau = \frac{QG_1}{bI_z}$$

で，これは中立軸 z 上で最大となる。ここで，G_1 の対象とする図の斜線部分を２つの部分断面に分け，それらの断面積と図心位置



$$A_W = 2.5\times17.5 = 43.75\,\mathrm{cm}^2,\ y_W = \frac{17.5}{2}\,\mathrm{cm}$$

$$A_F = 20\times2.5 = 50\,\mathrm{cm}^2,\ y_F = 18.75\,\mathrm{cm}$$

から，中立軸 z に関する断面１次モーメント G_1 は

$$G_1 = A_W y_W + A_F y_F = 1320\,\mathrm{cm}^3$$

したがって，最大せん断応力（$b = 2.5\,\mathrm{cm}$）

$$\tau_{\max} = \frac{QG_1}{bI_z} = \frac{38\times10^3\times1320}{2.5\times9.773\times10^4} = 205.3\,\mathrm{N/cm}^2$$

8-B2

最大曲げモーメント（中央点 C）

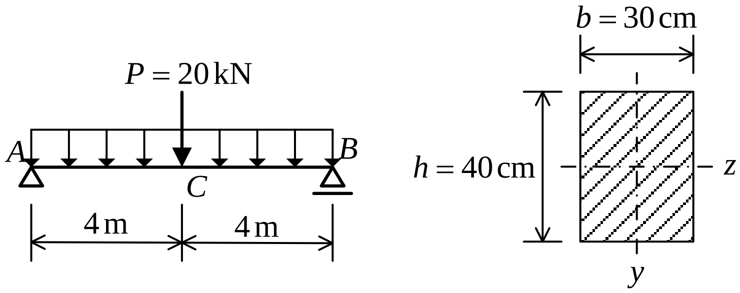
$$M_{\max} = \frac{Pl}{4} + \frac{ql^2}{8} = \frac{20\times 8}{4} + \frac{4\times 8^2}{8} = 72\,\mathrm{kNm}$$

最大せん断力（支点 A）

$$Q_{\max} = V_A = \frac{P}{2} + \frac{ql}{2} = \frac{20}{2} + \frac{4\times 8}{2} = 26\,\mathrm{kN}$$

矩形断面の曲げに対する断面２次モーメント

$$I_z = \frac{bh^3}{12} = \frac{0.3\times 0.4^3}{12} = 1.6\times 10^{-3}\,\mathrm{m^4}$$



最大曲げ応力（中央点 C，最下縁，引張）

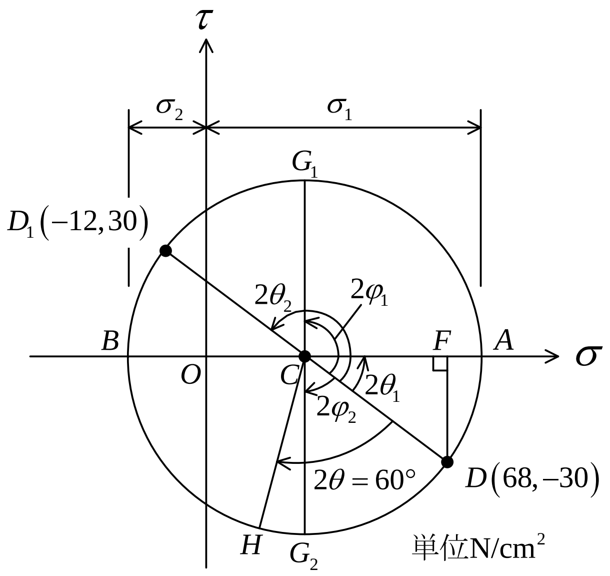
$$\sigma_{\max} = \frac{M_{\max}}{I_z}\left(\frac{h}{2}\right) = \frac{72\times 10^3}{1.6\times 10^{-3}} \times \frac{0.4}{2} = 9.0\times 10^6\,\mathrm{Pa} = 9.0\,\mathrm{MPa}$$

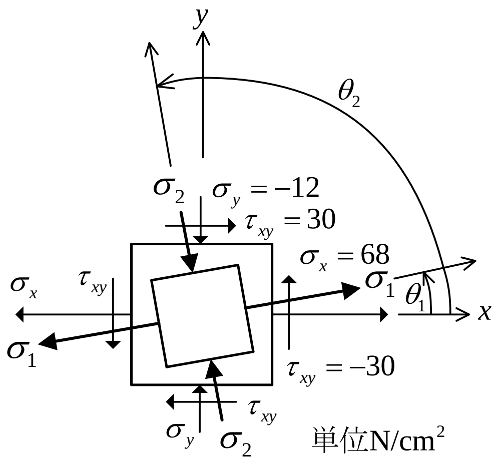
最大せん断応力（支点 A，図心軸 z）

$$\tau_{\max} = \frac{3}{2}\left(\frac{Q_{\max}}{A}\right) = \frac{3}{2} \times \frac{26\times 10^3}{0.3\times 0.4} = 3.25\times 10^5\,\mathrm{Pa} = 0.325\,\mathrm{MPa}$$

8-B3

直交座標系 $\sigma-\tau$ において，モールの応力円を描く。





①点 $D(68,-30)$ をとる。

②点 $D_1(12,30)$ をとる。

③点 D と点 D_1 を結び，σ 軸との交点 C を求める。点 C の座標は $(28,0)$

④点 C を中心に，半径 CD の円を描く（モールの応力円）。円の半径は

半径：$CD=\sqrt{CF^2+FD^2}=\sqrt{40^2+30^2}=50$

⑤モールの応力円と σ 軸との交点 A および B を求める。

・点 A（最大主応力） $\sigma_1=OC+CD=78\,\mathrm{N/cm^2}$

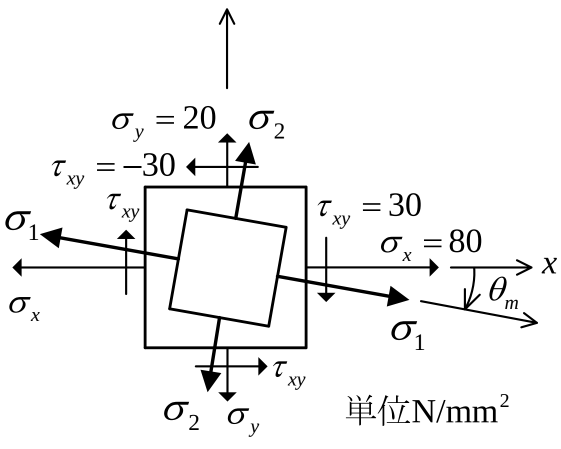
最大主応力面（反時計回り） $\tan 2\theta_1=\dfrac{30}{40}$

モールの応力円で $2\theta_1=36.87°$，微小要素で $\theta_1=18.43°$ ……(1)の解

・点 B（最小主応力） $\sigma_2=OC-CD=-22\,\mathrm{N/cm^2}$

最小主応力面（反時計回り） $2\theta_2=2\theta_1+180°$

モールの応力円で $2\theta_2=216.87°$，微小要素で $\theta_2=108.43°$ ……(1)の解



⑥せん断応力の大きさが最大になるのは，点 C から σ 軸への垂線とモールの応力円の交点 G_1 と G_2 で最大せん断応力の大きさはともに

$\tau_{\max} = CD = 50\,\mathrm{N/cm^2}$ （垂直応力 $\sigma = 28\,\mathrm{N/cm^2}$ ）……(2)の解

・点 G_1 で，点 D から反時計回りの角度

モールの応力円で $2\varphi_1 = 2\theta_1 + 90° = 126.87°$，微小要素で $\varphi_1 = 63.43°$……(2)の解（図省略）

・点 G_2 で，点 D から時計回りの角度

モールの応力円で $2\varphi_1 = 90° - 2\theta_1 = 53.13°$，微小要素で $\varphi_1 = 26.57°$……(2)の解（図省略）

⑦法線が x 軸と時計回りに角度 $\theta = 30°$ をなす断面は，モールの応力円上で点 H で

垂直応力

$$\sigma_{30} = OC - CH\cos\left(180° - 2\theta_1 - 60°\right) = OC - CD\cos 83.13° = 22.02\,\mathrm{N/cm^2}$$ ……(3)の解

せん断応力

$$\tau_{30} = -CH\sin 83.13° = -\mathrm{CD}\sin 83.13° = -49.64\,\mathrm{N/cm^2}$$ ……(3)の解